

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 84

1. *Die Bewegungserscheinungen des Wassers beim Durchgang schnell bewegter Kugeln;*

von Carl Ramsauer

unter Mitarbeit von G. Dobke

(Hierzu Tafel XVI und XVII)

Von den Erscheinungen, die beim Durchgang eines Geschosses durch Wasser auftreten, ist nur die Anfangsursache und die Endwirkung bekannt, nämlich die Abgabe der kinetischen Energie an das Wasser¹⁾ und das explosionsartige Auseinanderfliegen des ganzen Behälters. Die Aufgabe der folgenden Untersuchung besteht darin, die *Zwischenvorgänge im einzelnen* experimentell aufzuklären und, soweit wie möglich, in ihren dynamischen Zusammenhängen verständlich zu machen.

1. Ausführung der Versuche

Als Geschosß diente eine Stahlkugel von 11,003 mm Durchmesser, wie sie für Kugellager verwandt wird. Die Anfangsgeschwindigkeit betrug rund 650 m/sec. Der Schuß erfolgte ohne Drall aus glattem Gewehrlauf. Die experimentelle Aufgabe bestand darin, die Bewegungserscheinungen, welche durch den Einschlag eines solchen Geschosses in ein abgegrenztes Wasservolumen hervorgerufen werden, photographisch aufzunehmen. —

Besondere Mühe mußte auf die Konstruktion eines Wasserbehälters verwandt werden, der die notwendigen mechanischen und optischen Eigenschaften vereint. Glaswände erwiesen sich als ungeeignet; sie setzen der anfänglichen Bewegung des Wassers einen zu starren Widerstand entgegen und werden andererseits

1) Diese richtige Grunderklärung der explosionsartigen Wirkung moderner Infanteriegeschosse verdanken wir den Herren C. Cranz und K. R. Koch (Ann. d. Phys. 3. S. 247—273. 1900), Über das Verhältnis der Cranz-Kochschen Ergebnisse zu den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit vgl. Abschnitt 6.

selbst bis zu Dicken von 10 mm bei jedem Schuß zerstört, ohne leicht und billig ersetzt werden zu können. Schließlich erwies sich folgende Konstruktion aus Celluloid als geeignet (Fig. 1). Der Haupthalt wird gebildet von zwei Rahmen *RR* aus 12×12 mm Vierkanteisen. Auf diese wird von außen unter Zwischenlegung eines Gummistreifens und unter Auflegung eines Messingstreifens ein Blatt Celluloid *CC* von 0,3 mm Dicke mittels je 20 Schrauben befestigt, so daß eine Art tiefer Mulde entsteht. An die Stirnseiten der Eisenrahmen ist mit 20 versenkten Schrauben je ein entsprechend ausgesägender Celluloidrahmen von 12 mm Streifenbreite und 3 mm Dicke angesetzt (in der Figur nicht gezeichnet). Auf diesem werden als Abschluß der Stirnseiten papierdünne Celluloid-

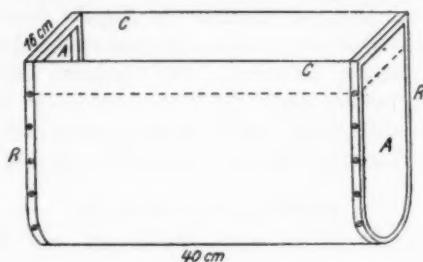


Fig. 1

wände *AA* mittels Aceton festgeklebt. Ein solcher Kasten muß nach jedem Schuß neu mit Celluloidwänden versehen werden, doch können die Seitenwände, die nur aus den Befestigungen herausreißen, ohne ganz zerstört zu werden, einige Male benutzt werden, soweit die Ebenheit der Flächen nicht zu sehr gelitten hat.

Zur Beleuchtung bei der Aufnahme diente ein starker Funke aus 2—4 großen Leidner Flaschen. Fig. 2 gibt einen Querschnitt durch die Mitte des Celluloidkastens senkrecht zur Geschoßbahn. Es ist: *C* der Celluloidkasten, *W* die Wasseroberfläche, *K* die Spur der Kugelbahn, *O* das sehr lichtstarke Objektiv (Brennweite 10,7 cm; Durchmesser 5,4 cm) der photographischen Kamera, *P* eine weiße Papierwand, *F* der Beleuchtungsfunke, *MM* die Magnesiumelektroden (Längsrichtung in Wirklichkeit parallel zur Geschoßbahn), *L* die Leidner

Flaschenbatterie, S ein Parabolspiegel in solcher Einstellung, daß die ganze Papierfläche P hinter dem Celluloidkasten möglichst gleichmäßig beleuchtet wird. Außerdem ist punktiert die Auslösefunkenstrecke F' eingezeichnet; F' befindet sich in Wirklichkeit einige Zentimeter vor der Einschußstirnwand des Celluloidkastens, etwas seitlich zur Geschosßbahn. Die Einstellung der photographischen Kamera erfolgt so, daß die Punkte der Geschosßbahn scharf erscheinen.

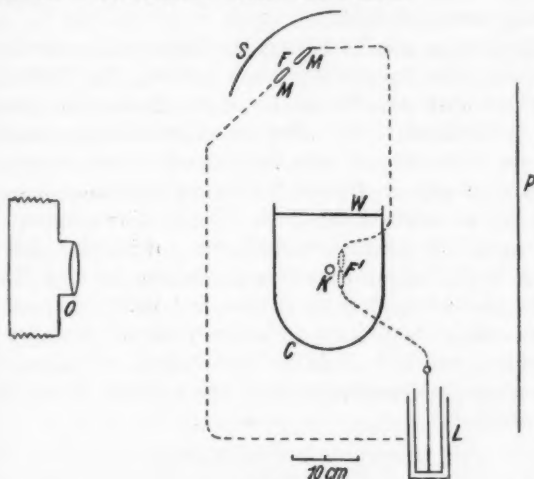


Fig. 2

Der photographische Vorgang ist jetzt ohne weiteres verständlich. Die Kugel schlägt in die Einschußstirnwand des Celluloidkastens (A auf der linken Seite der Fig. 1) ein und spritzt dabei eine Wassergarbe nach hinten. Sobald diese die Auslösefunkenstrecke F' erreicht hat, geht auch an der Hauptfunkenstrecke F ein Funke über. Dieser Funke beleuchtet die Papierwand P so stark, daß in der photographischen Kamera ein Bild der augenblicklichen Erscheinungsform des Vorgangs erhalten wird.¹⁾ Der Aufnahmемoment kann

1) Die direkte Beleuchtung von hinten (F' an Stelle von P), welche größere Helligkeit gibt, hat sich nicht bewährt. Die Cranzsche Hohlspiegelanordnung (Lehrbuch der Ballistik, Bd. III, S. 301, 1913) habe ich nicht probieren können, da ich keinen genügend großen Hohlspiegel

leicht variiert werden durch Änderung des Abstandes der Auslöschungsfunkkenstrecke F' von der Einschußstirnwand A ; je größer dieser von der Wassergarbe zurückzulegende Weg gemacht wird, um so später erfolgt die Aufnahme. Sollen sehr späte Momente erfaßt werden, z. B. Momente, in denen die Kugel den Kasten schon auf der anderen Seite verlassen hat, so legt man F' besser auf die Ausschußseite des Kastens, wobei man statt der Wasserspritze auch die Kugel selbst zur Auslösung benutzen kann.

Als photographische Platten wurden vorzugsweise Herzog, Ortho-Isodux im Format 6×9 cm benutzt. Zur Hebung der Kontraste wurde das Wasser leicht mit Kaliumbichromat gefärbt. Selbstverständlich wäre es sehr wünschenswert, an Stelle von Einzelbildern eine fortlaufende kinematographische Aufnahme zu setzen. Da die Belichtung unbedingt momentan sein muß, so käme hierbei nur Funkenkinematographie in Frage, unter Benutzung schnellstens aufeinander folgender kräftiger Entladungen. Derartige Einrichtungen sind für ähnliche Zwecke schon benutzt worden und ließen sich auch für die hier vorliegende Aufgabe ausbilden.¹⁾ Sie würden aber einen sehr großen Aufwand an Mühe und Mitteln erfordern, wenn man genügendes Gesichtsfeld und ausreichende Helligkeit erzielen will.

2. Unmittelbare Versuchsergebnisse

Die Bilder 1—7, Taf. XVI geben eine Reihe solcher Aufnahmen wieder. Die Einschußtiefe, d. h. der Abstand zwischen Geschosßbahn und freier Wasseroberfläche beträgt rund 7 cm, so

habe, zu bedenken wäre aber auch bei dieser Anordnung, daß ein durchsichtiges Gebilde, wie dieser Celluloidwassertrog, ein sehr schwieriges Abbildungsobjekt ist.

1) Da die Bildzahl einer Aufnahmereihe nicht sehr groß zu sein braucht, während andererseits an die Helligkeit große Anforderungen gestellt werden müssen, so käme wohl in erster Linie die schnell nacheinander erfolgende Entladung von etwa 10 Leidener Flaschen über die gleiche Funkenstrecke in Betracht (Methode von Kranzfelder und Schwinning, verbessert von Schatte; vgl. Cranz, Ballistik, Bd. III, S. 300, 1913). Von den kinematographischen Anordnungen im eigentlichen Sinne ist der „ballistische Kinematograph“ von Cranz in erster Linie zu nennen, da er neben der Erhöhung der Bildzahl auf 5000/sec auch Helligkeit und Gesichtsfeld nach Möglichkeit berücksichtigt.

daß die Kugel allseitig von einem Wassermantel von 7—8 cm umgeben ist.

Am Einzelbilde, z. B. am Bild 3, ist folgendes hervorzuheben. Die Kugel erscheint entsprechend der außerordentlichen Kürze der Belichtungszeit als Kreis, wie es auf den Originalphotogrammen noch deutlicher erkennbar ist. Vor der Kugel ist keine Veränderung des Mediums zu bemerken, hinter der Kugel erscheint ein räumliches Gebilde mit scharfer Umgrenzung, das der Kürze wegen als „Einschußkegel“ bezeichnet sei. Die Umgrenzungsfläche entspricht nahe der Kugel einem Paraboloid, nähert sich dann weiter nach rückwärts einem Kegelmantel an und wird schließlich nahe der Einschußstelle zylinderförmig. Letzteres ist besonders deutlich am Bild 4 zu sehen und muß reell sein, da es auch bei sehr kleinen Geschwindigkeiten deutlich auftritt (vgl. Abschnitt 5). Das Wasser des Einschußkegels wird, ob vollständig oder nur zum Teil, möge zunächst dahingestellt bleiben, nach rückwärts geschleudert. Bei den Bildern 3, 4, 5 erfolgt diese Bewegung diametral entgegen der Schußrichtung, bei den Bildern 1 und 2 tritt hierzu noch eine *schräg* nach hinten gerichtete, vom Einschußpunkt ausgehende Wassergarbe. Diese Wassermassen müssen zum größten Teil aus Spritzern bestehen, wie aus Bild 1 folgt, wo die gesamte Wassergarbe mindestens das vierfache Volumen des Einschußkegels besitzt, und treten nur deswegen so stark hervor, weil sie durch den nahen Auslöschungsfunkeln besonders beleuchtet werden. Die Gesamtmenge dieser Wassermassen wird im Vergleich mit dem Volumen des Einschußkegels um so geringer, je weiter der Vorgang von Bild 1 bis Bild 5 fortschreitet, wie unmittelbar aus den Bildern hervorgeht und wie durch besondere Versuche (S. 702/703) bestätigt wird.

Beim Austritt der Kugel, Bild 5 und 6, bemerkt man ebenfalls eine Wassergarbe, doch ist die Wassermenge hier recht gering, wie namentlich aus Bild 7 hervorgeht. In Bild 5 und 6 ist der augenblickliche Kugelort noch mit photographiert, in 6 allerdings nur auf der Originalplatte einwandfrei erkennbar. Bei Bild 6 liegt übrigens der Auslöschungsfunkeln auf der Ausschußseite, wodurch sich das helle Hervortreten der Ausschußgarbe erklärt.

Endlich zeigt sich auf der Wasseroberfläche eine mit größerer Einschußstrecke wachsende Emporwölbung, welche bei dieser Versuchsreihe noch nicht so gut zu verfolgen ist, sich aber in immer wachsendem Maße verstärkt, wenn die Einschußtiefe verringert wird (vgl. z. B. die S. 703 näher besprochenen Bilder 8 und 9).

Das Innere des Einschußkegels ist nach dem gesamten Versuchsmaterial als Hohlraum anzusprechen. Das verdrängte Wasser wird bei geringerer Einschußstrecke in merklicher Menge nach hinten geschleudert, bei größerer Einschußstrecke schafft es sich hauptsächlich Raum durch eine senkrecht zur Schußbahn gerichtete Bewegung, indem es die freie Oberfläche emporwölbt und die Celluloidwände nach den Seiten ausbuchtet, welch letzteres daran zu erkennen ist, daß die Eisenrippe an der Einschußseite nach dem Inneren des Celluloidkastens gezogen wird. Hierbei ist im Auge zu behalten, daß der Kubikinhalt des Hohlraums bis zum Austritt der Kugel aus dem Behälter noch verhältnismäßig klein gegenüber den Dimensionen des Celluloidkastens bleibt. Am deutlichsten wird der Hohlraumcharakter des Einschußkegels in den Phasen, wo die Kugel den Celluloidkasten schon längst verlassen hat, wobei sich diese Phasen durchaus stetig aus dem Anfangsstadium entwickeln.

Um das Überwiegen der Radialbewegung des Wassers in den späteren Phasen des Vorgangs auch unmittelbar zu beweisen, wurden noch folgende Versuche zur direkten Bestimmung der nach hinten geschleuderten Wassermengen ausgeführt (Fig. 3).¹⁾ $S_1 S_2$ ist die Schußbahn, K ist ein großer Blechkasten mit den kreisförmigen Öffnungen O_1 und O_3 , C ist der bis zur Wasseroberfläche W gefüllte Celluloidkasten. Der Versuch besteht darin, die Wassermenge M , welche durch die Öffnung O_2 (Radius R) nach hinten geschleudert wird, durch Wägung des Kastens K vor und nach dem Schuß zu bestimmen, wobei Verluste durch O_1 durch Verschließen dieser Öffnung mit Papier vermieden werden. Die so gefundene Wassermenge ist dann zu vergleichen mit der Wassermenge, welche in den Kasten gelangen müßte, wenn *alles* die Kugel-

1) Für die Durchführung dieser Versuche möchte ich Hrn. cand. phys. Meinel auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

bahn umgebende Wasser genau nach rückwärts geschleudert würde, d. h. mit der Wassermenge M' des schraffiert gezeichneten Zylinders vom Radius R . Der Abstand a der beiden Kästen K und C ist dabei so groß gewählt, daß kein Wasser auf anderem zufälligen Wege nach K hineingelangen

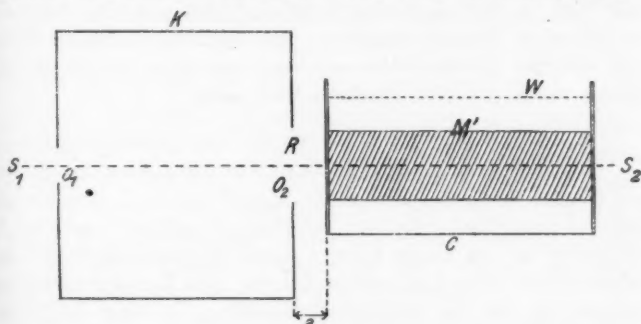


Fig. 3

kann, darf aber andererseits nicht zu groß sein, wenn nicht das schräg nach hinten geschleuderte Wasser (vgl. Bild 1 u. 2 der Taf. XVI) verloren gehen soll. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle niedergelegt.

$2R$ cm	a cm	M g	M' g	M/M' in %
4	8	78	500	16
6	10	214	1130	19
10	10	301	3150	10
14	13	376	6150	6

Wie man sieht, sind die nach hinten geschleuderten Wassermengen klein und zwar im ganzen relativ um so kleiner, je größer die auffangenden Öffnungen gewählt sind, d. h. je spätere Phasen des ganzen Vorgangs in Betracht gezogen werden. Der erste Wert von M (16 Proz.!) ist vielleicht infolge allzu schräg gerichteter Spritzer etwas zu gering ausgefallen. —

Außer der durch die Tafelbilder 1—7 dargestellten Versuchsreihe bei 7 cm Einschußtiefe wurden noch weitere Reihen bei 4,5 cm und 2,5 cm Einschußtiefe aufgenommen, von welchen aber nur je ein Photogramm (Nr. 8 und 9, Taf. XVI) wiedergegeben werden konnte. Die Reihe bei 4,5 cm (Bild 8) hat

noch den gleichen Charakter wie die Reihe bei 7 cm, nur daß die Emporwölbungen der Wasseroberfläche schon bei 15 cm Einschußstrecke deutlich hervorzutreten beginnen. Die Reihe bei 2,5 cm dagegen (Bild 9) gibt insofern eine neue Erscheinungsform, als die obere Hälfte des Einschußkegels sich hier im überwiegenden Maße ausbildet und eine fast rein kegelförmige Gestalt annimmt. Man beachte in diesem Bilde den scharfen Funkenreflex, aus dem man einen Schluß auf die Glätte dieser Kegeloberfläche ziehen kann.

8. Zahlenmäßige Verarbeitung der Versuchsergebnisse

In Fig. 4 der Taf. XVII sind die Grenzlinien aller Einschußkegel (Bild 1—6) für die Einschußtiefe 7 cm wiedergegeben unter Zufügung der jeweiligen Kugelgeschwindigkeit¹⁾; außerdem ist die untere Grenze des Einschußkegels Bild 7 als schwach punktierte Linie eingezeichnet. Die Zeichnung erfolgte in der Art, daß die Originalphotographien in einer der Wirklichkeit entsprechenden Größe nacheinander auf ein und denselben Zeichenbogen projiziert wurden. Wo die oberen Konturen versagten, wurde die Zeichnung mittels der deutlicher hervortretenden unteren Konturen spiegelgerecht ergänzt; diese Kurvenstücke sind gestrichelt eingetragen. Zu bedenken ist, daß die Grenzlinien verschiedenen Versuchen zugehören, deren Vorbedingungen naturgemäß etwas voneinander abweichen. Außerdem hat bei den einzelnen Versuchen die Orientierung der Kamera zum Celluloidtrog etwas gewechselt. Im großen und ganzen verlaufen jedoch die Grenzlinien der Einschußkegel glatt und widerspruchsfrei. —

Wesentlich ist zunächst, daß die Entwicklung der Einschußkegel nicht unterbrochen oder geändert wird, wenn die Kugel den Wasserbehälter schon verlassen hat. Daraus folgt, daß der einmal geschaffene Einschußkegel ein selbständiges, von dem Einfluß der Kugel unabhängiges Gebilde ist, welches sich durch radiale Eigenbewegung vergrößert.

Die Wassergeschwindigkeiten lassen sich leicht berechnen, indem die meßbaren Verschiebungen der Grenzlinien des Ein-

1) Die Berechnung dieser Geschwindigkeiten gründet sich auf die ebenfalls im hiesigen Institut ausgeführte Arbeit Hrn. W. Bauers: „Das Widerstandsgesetz schnell bewegter Kugeln in Wasser“. Ann. d. Phys. 80. S. 232. 1926.

schußkegels mit dem gleichzeitigen Fortschreiten der Kugel verglichen werden. Beispiel: die Grenzlinie hat sich im Querschnitt 3' von a nach b um 1,8 cm nach außen bewegt, während die Kugel vom Punkte 3 zum Punkte 4 gelangt ist; für diesen Weg braucht die Kugel, wie sich leicht nach Hrn. Bauer (a. a. O.) aus den gegebenen Geschwindigkeitsdaten berechnen läßt, eine Zeit von 0,000493 sec, die Geschwindigkeit der Wasserbewegung ergibt sich also zu $\frac{0,018}{0,000493} = 36,5$ m/sec.

Die so erhaltenen Geschwindigkeitswerte sind für diejenigen Querschnitte 1'—4' der Fig. 4, welche jedesmal um einen Kugeldurchmesser hinter den Kugelmittelpunkten der Orte 1—4 gelegen sind, abgerundet eingetragen, wobei diejenigen Werte, welche sichtlich durch zufällige Unregelmäßigkeiten der Begrenzungskurven gefälscht sind, einen * erhalten haben. Es ergeben sich folgende Hauptresultate:

- a) Die Geschwindigkeit der Wasserbewegung nimmt mit der radialen Entfernung ϱ von der Geschoßbahn ab und zwar ungefähr proportional $1/\varrho$.
- b) Die Geschwindigkeit der Wasserbewegung steht in einem bestimmten konstanten Verhältnis zur Geschwindigkeit der Kugel.

Zu a) Für die Querschnitte 3' und 4', welche allein zur Lösung dieser Frage verwertbar sind, ergibt sich folgende kleine Tabelle:

Querschnitt	Mittlere Geschwindigkeit v m/sec	Mittlerer Abstand ϱ cm	$v \cdot \varrho$
3'	36,5	2,0	73
	21,5	3,3	71
	14,1	4,2	59
4'	31,0	1,8	51
	16,8	2,8	47

Soweit für jeden einzelnen Querschnitt $v \cdot \varrho$ konstant ist, kann die obige Regel als erfüllt gelten.¹⁾ —

1) Der übrigens nicht allzu große Gang des Produktes $v \cdot \varrho$ scheint mir auf der geschwindigkeitsvermindernden Wirkung der Kastenwände zu beruhen, welche mit wachsendem ϱ immer mehr zur Geltung kommen muß.

Zu b) Die nachstehende Tabelle enthält in den Kolonnen 1, 2, 3, 4 alle in Betracht kommenden *experimentellen* Daten für die der Kugel zunächst gelegenen Bewegungsabschnitte.

Querschnitt	Kugelgeschw. v m/sec	Wassergeschw. v' m/sec	Mittleres ϱ cm	v' corr. auf $\varrho = 2,0$ cm	$\frac{v'}{v}$ corr in %
1'	550	95	1,5	71	12,9
2'	470	56,3	2,0	56,3	12,0
3'	315	36,5	2,0	36,5	11,6
4'	220	31,0	1,64	25,4	11,5

Mittel 12,0

Ein Vergleich zwischen Wassergeschwindigkeit und Kugelgeschwindigkeit ist jedoch in dieser Form noch nicht möglich, da die Wassergeschwindigkeiten der 4 Fälle auf verschiedenen gelegene Bewegungsstrecken bezogen sind. In Kolonne 5 sind daher die Wassergeschwindigkeiten nach ihrer soeben unter a) abgeleiteten Beziehung zum mittleren Abstand von der Geschoßbahn auf einheitliche Grundlage umgerechnet. Die Kolonne 6 ergibt jetzt, daß die Wassergeschwindigkeit immer im gleichen Verhältnis zur Geschoßgeschwindigkeit steht. —

Die in Fig. 4 punktiert gezeichnete Grenze des sich immer mehr erweiternden Einschußkegels (Bild 7, Taf. XVI) ist nicht mehr verwertbar, weil der zugehörige Kugelort und damit der zugehörige Zeitpunkt fehlen. Bemerkenswert ist die immer unregelmäßiger werdende Form, welche der Hohlraum annimmt. Diese Erweiterung geht schließlich in die explosionsartige Auseinanderschleuderung der ganzen Wassermasse über. Dabei ist der Verlauf des Vorganges in immer wachsendem Maße von den Dimensionen des durchschossenen Wasservolumens abhängig.

4. Hydrodynamische Bemerkungen zu den Versuchsergebnissen

Unsere Versuche gehören zu den Hohlraumerscheinungen, d. h. zu einem Gebiet der Hydrodynamik, welches theoretisch bisher fast völlig vernachlässigt worden ist. Nur W. Thomson¹⁾ hat einen Spezialfall kurz gestreift. Andererseits haben diese

1) W. Thomson, On the Formation of Coreless Vortices by the Motion of a Solid through an Inviscid Incompressible Fluid. Phil. Mag. Series 5. 23. S. 255. 1887.

Erscheinungen als sogenannte Kavitationen im Wasser hinter schnell bewegten Schraubenflügeln u. dgl. eine große praktische Bedeutung erlangt¹⁾, da sie energieverzehrend und außerdem in höchstem Maße materialzerstörend wirken. Die theoretische Behandlung für die ideale Flüssigkeit erscheint mir nicht ausichtslos und ist jedenfalls erheblich wichtiger, als manche mit höchstem mathematischen Aufwand durchgeführte Künstelei der älteren Hydrodynamik. Sie würde außerdem deswegen besonders lohnend sein, weil wenigstens in den hier untersuchten Geschwindigkeitsgebieten eine verhältnismäßig große Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erwarten steht. Denn die Reibung tritt gegenüber den Trägheitskräften sehr zurück und die Kompressibilität spielt noch keine allzu große Rolle. —

Wir müssen uns hier mit einer Skizzierung der Vorgänge begnügen. In einem ersten Abschnitt (4. 1.) wollen wir *quantitativ* feststellen, unter welchen Bedingungen sich überhaupt Hohlräume bilden, und an welcher Stelle der Hohlraum bei unseren speziellen Versuchsbedingungen an der Kugel ansetzt. In einem zweiten Abschnitt (4. 2.) wollen wir *qualitativ* untersuchen, welche Vorstellung man sich von den Wasserbewegungen in der Nähe der Kugel machen muß.

1. Quantitatives zur Frage der Hohlraumbildung

Die klassische Hydrodynamik gibt für das Verhalten einer ruhenden Kugel in einer gleichförmig strömenden Flüssigkeit das bekannte Bild (Fig. 5). Angenommen wird hierbei eine ideale, d. h. reibungslose, inkompressible Flüssigkeit. Es besteht aber noch eine zweite Voraussetzung für die Gültigkeit dieses Strömungsbildes:

der Druck, unter dem die Flüssigkeit in großer Entfernung von der Kugel steht, muß so hoch sein, daß er jeden in der Nähe der Kugel auftretenden Unterdruck absolut genommen

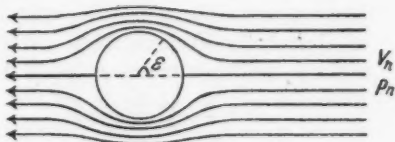


Fig. 5

1) Vgl. besonders H. Föttinger, Untersuchungen über Kavitation und Korrosion bei Turbinen, Turbopumpen und Propellern. Hydraulische Probleme, VDI-Verl. S. 14–64. 1926.

übertrifft, denn sonst würde ein *Hohlraum* entstehen. Maßgebend für den Zusammenhang zwischen dem Druck p , der Geschwindigkeit v und der Dichte γ ist hierbei die Bernoulli'sche Gleichung, welche bei Beschränkung auf Punkte gleicher Höhenlage oder auch bei Vernachlässigung des Schwerfeldes die Form annimmt

$$(1) \quad p_a + \frac{1}{2} \gamma v_a^2 = p_n + \frac{1}{2} \gamma v_n^2,$$

wo der Index a dem Aufpunkt und der Index n dem normalen, d. h. nicht durch die Kugel gestörten Bereich entspricht.

Zur Entscheidung der Frage, ob p_a an der Kugeloberfläche den Wert 0¹⁾ annehmen kann, müssen wir die ganze an dieser geltende Druckverteilung bestimmen. Wir führen den Winkel ϵ in Graden zur Festlegung der Kugeloberflächenpunkte ein (vgl. Fig. 5) und benutzen die Gradzahlen als Indizes für die p und v . Dann ist nach bekannten hydrodynamischen Überlegungen z. B. $v_0 = 0$, $v_{90} = \frac{3}{2} v_n$, und dementsprechend

$$(2) \quad p_0 = p_n + \frac{1}{2} \gamma v_n^2,$$

$$(3) \quad p_{90} = p_n + \frac{1}{2} \gamma v_n^2 - \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{3}{2} v_n\right)^2 = p_n - \frac{5}{8} \gamma v_n^2.$$

Ebenso lassen sich alle anderen p_ϵ aus ihren v , die bei Benutzung quantitativer Strömungsbilder leicht aus dem Abstand der Strömungslinien an den betreffenden Stellen entnommen werden können, berechnen.

Zur Veranschaulichung und Verwertung des Zusammenhangs zwischen p_ϵ und ϵ benutzen wir eine auch sonst übliche graphische Darstellung²⁾, in die man sich zunächst mit einiger Mühe hineindenken muß, die aber tatsächlich alles Wesentliche in einfachster Form enthält. Wir tragen über ϵ als Abszisse nicht p_ϵ selbst, sondern $p_\epsilon - p_n$, d. h. den Überschuß über den Normaldruck, als Ordinate auf und wählen dabei als Ordinaten-einheit $p_0 - p_n$, den sog. Staudruck, der nach Gleichung (2) den Wert $\frac{1}{2} \gamma v_n^2$ besitzt.

Welches ist jetzt die Bedingung dafür, daß p_ϵ an keiner Stelle der Kugel den Wert 0 annimmt, daß also das Strömungs-

1) Genau genommen müßte man statt des Drucks 0 den Wasserdampfdruck bei der betreffenden Temperatur einsetzen, doch spielt dieser Unterschied bei unseren Versuchen keine merkliche Rolle.

2) Vgl. z. B. H. Ermisch, Strömungsverlauf und Druckverlauf in Abhängigkeit von der Kennzahl. Abh. aus dem aerodynamischen Inst. an der Techn. Hochschule Aachen, Heft 6, S. 48. 1927.

bild (Fig. 5) der klassischen Hydrodynamik nicht durch das Auftreten eines Hohlraumes zerstört wird? Nach unserem Diagramm (Fig. 6) besitzt $p_e - p_n$ und damit auch p_e seinen kleinsten Wert bei $\varepsilon = 90^\circ$, unsere Bedingung lautet also $p_{90} \geq 0$, oder nach Gleichung (3) $p_n - \frac{\rho}{8} \gamma v_n^2 \geq 0$.

Für Luft ist diese Bedingung bis 100 m/sec, d. h. bei allen Flugproblemen, einwandfrei erfüllt, erst bei den Geschossgeschwindigkeiten der modernen Ballistik ist mit Hohlraum-

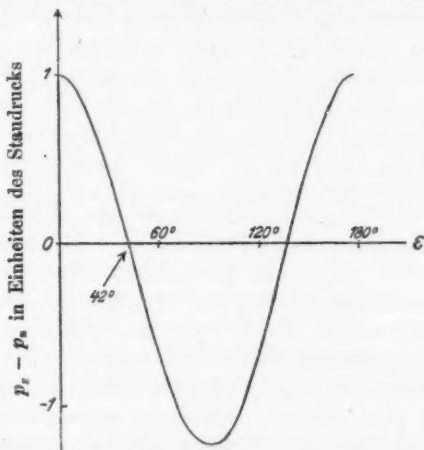


Fig. 6

bildungen zu rechnen. Bei Wasser dagegen liegt die Sache wegen der viel größeren Dichte ganz anders. Bei geringer Wassertiefe, d. h. bei Atmosphärendruck, berechnet sich die Grenzggeschwindigkeit unter Benutzung abgerundeter Zahlenwerte aus

$$v_n^2 = \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{1 \text{ g/cm}^3} \cdot 10^6 \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$$

zu rund 13 m/sec.

Bei unseren viel höheren Geschossgeschwindigkeiten muß also jedenfalls eine ausgeprägte Hohlraumbildung auftreten. Es fragt sich nur noch, an welcher Stelle sich die Strömung von der Kugel löst. Wir nehmen

$$p_n = 10^6 \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}, v_n = 5 \cdot 10^4 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

an. Dann ist p_e für dasjenige ε gleich 0, für welches die Ordinate der Fig. 6 $p_e - p_n = -10^6 \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ wird. Diese

Stelle liegt kaum merklich jenseits des Schnittpunkts der Kurve mit der Abszissenachse, da die Einheit des Ordinatenmaßstabes sich aus $p_0 - p_n = \frac{1}{2} \gamma v_n^2$ zu $1250 \cdot 10^6 \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}$ berechnet. Die Ablösung erfolgt also etwa an der Stelle, wo $\varepsilon = 42^\circ$ wird. —

2. Qualitatives zur Frage der Wasserbewegung

Das war alles, was quantitativ über die Hohlraumbildung in einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit ausgesagt werden kann. Wenn ich trotzdem darüber hinaus noch einige allgemeine Folgerungen zu ziehen versuche, so bin ich mir klar darüber, daß ich möglicherweise ein Bild gebe, „which, however, may be enormously far from like the true configuration“, wie W. Thomson in der oben zitierten Arbeit bei ähnlichen Überlegungen sagt. —

Wir wollen im folgenden erstens die Hohlraumbildung in idealisierter Form betrachten, zweitens die Abweichungen unserer Versuche von diesem Idealschema besprechen, drittens das erhaltene Schema so weit wie möglich auf unsere Versuche anwenden und endlich viertens die so gewonnenen Resultate mit den experimentellen Ergebnissen vergleichen.

Wir müssen uns auf stationäre Vorgänge beschränken, das Medium muß also als unendlich vorausgesetzt werden. Wir haben die Wahl, ob wir die unendliche Ausdehnung nach allen Richtungen oder nur in einer Richtung annehmen wollen. Den letzteren Fall, bei welchem sich die Kugel in der Mittelachse eines unendlich langen Zylinders von endlichem Radius bewegen würde, ziehen wir vor, da er leichter zu realisieren ist, z. B. als Wasserstrahl von hoher Geschwindigkeit, in dessen Mitte die Kugel ruhend gehalten wird, und da auch bei unseren Versuchen ein angenähert zylindrisches Gebilde durchschossen wird.

Die Fig. 7 stellt den Vorgang in diesem Sinne mit ruhender Kugel dar. Die Geschwindigkeit des Wasserzylinders sei v_n , der Außendruck p_n , wobei $\frac{1}{2} \gamma v_n^2$ als sehr groß gegen p_n angenommen ist; das Schwerfeld werde vernachlässigt. Die Bewegungsrichtung der Wasserteilchen im Augenblick der Lösung liegt tangential zur Kugel, so daß bei Fortsetzung dieser Richtung entsprechend $\varepsilon = 42^\circ$ ein Hohlkegel von 96° Öffnungswinkel entstehen würde. Unter dem Einfluß des äußeren

Drucks und der umgebenden Wassermassen muß die Grenzschicht diese Richtung aber mehr und mehr verlassen und eine etwa der Zeichnung entsprechende Bahn beschreiben, so daß hinter der Kugel ein Hohlraum von der skizzierten Form entsteht. Hinter diesem Hohlraum stellt sich dann die ursprüngliche Strömung wieder her. Die Geschwindigkeit v_g dieser Grenzschicht an der Loslösungsstelle, d. h. dort, wo $p_e = 0$ wird, folgt nach Gleichung (1) aus

$$0 + \frac{1}{2} \gamma v_g^2 = p_n + \frac{1}{2} \gamma v_n^2,$$

ist also, da $\frac{1}{2} \gamma v_n^2$ sehr groß gegen p_n sein soll, nur wenig größer als v_n . Die gleiche absolute Geschwindigkeit muß diese Schicht längs ihres ganzen Weges am Hohlraum hin beibehalten, da hier ja der Druck konstant gleich Null ist, nur daß sich ihre x - und φ -Komponenten ändern. Ebenso ist die Geschwindigkeit der Außenschicht des Zylinders konstant gleich v_n , da hier der konstante Druck p_n gilt. —

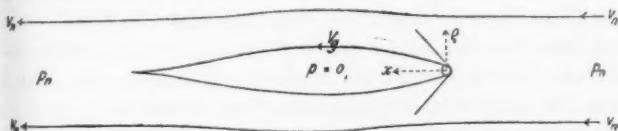


Fig. 7

Bevor wir weiter gehen, müssen wir uns erst über diejenigen Punkte klar werden, in welchen unsere Versuchsbedingungen von obigen Voraussetzungen abweichen.

Der erste Hauptpunkt besteht darin, daß bei den Versuchen der geschaffene Hohlraum an seiner hinteren Seite mit der umgebenden Luft in Verbindung steht, daß also im Hohlraum nicht der Druck 0, sondern ein von 0 verschiedener Luftdruck p_i herrscht. Zunächst, d. h. solange die Geschwindigkeit der Kugel die Einstömungsgeschwindigkeit der Luft ins Vakuum, rund 400 m/sec, überschreitet, ist $p_i = 0$. Bei stärkerer Abnahme der Kugelgeschwindigkeit wird die nachströmende Luft die Kugel, wenn auch nicht mit vollem Atmosphärendruck, erreichen, wird aber auch dann an dem Ablösungsvorgang nichts Wesentliches ändern, da es selbst für die kleinste in Betracht kommende Kugelgeschwindigkeit von 220 m/sec fast gleichgültig ist, ob die Ablösung für den Druck 0 oder für irgend

einen zwischen 0 und 1 Atm. gelegenen Druck p_i erfolgt. Diese geringen Unterschiede spielen gegenüber der Größe der Ordinaten-einheit in Fig. 6 keine Rolle und können den Ablösungswinkel nicht merklich verändern. Dagegen wird die Vergrößerung des Druckes im Hohlraum sich wesentlich bemerkbar machen, wenn der Hohlraum eine solche Größe erreicht hat, daß die zu seiner Schaffung notwendige *Energie* eine wesentliche Rolle zu spielen beginnt. Bis zum Bild 4 auf Tafel XVI ist dies jedenfalls noch nicht der Fall. Der geschaffene Hohlraum hat hier eine Größe von rund 1000 cm^3 , zu seiner Schaffung gegen vollen Atmosphärendruck, d. h. für $p_i = 0$, würden $1000 \text{ cm}^3 \cdot 10^6 \text{ Dyn} \cdot \text{cm}^{-2} = 1 \cdot 10^9 \text{ Erg}$ notwendig sein, das sind, wie sich leicht aus den Geschwindigkeitsangaben der Fig. 4 und der Masse der Kugel (5,42 g) berechnen läßt, rund nur 10 Proz. der Energie, welche die Kugel auf ihrem Wege bis zur Spitze dieses Einschlußkegels verloren hat. Ob also p_i im Mittel hier etwas größer oder kleiner angenommen wird, macht noch nichts aus. Wesentlich wird dies erst für Bild 5 und 6. Dort hat aber der Druck im Hohlraum jedenfalls schon sehr nahe den Atmosphärendruck erreicht. Will man also alles in allem für den Gesamtvorgang mit einem mittleren p_i rechnen, so hat man p_i nur wenig unter Atmosphärendruck einzusetzen.

Der *zweite* Hauptpunkt, in welchem die Versuchsbedingungen von den obigen idealen Voraussetzungen abweichen, besteht darin, daß wir es experimentell nicht mit einem stationären Vorgang zu tun haben: a) die Geschwindigkeit der Kugel nimmt auf ihrer Bahn im Wasser dauernd ab; b) der ganze Vorgang wird erst durch den Einschluß der Kugel eingeleitet.

Zu a) Der erste Grund ändert nichts an den Konturen der Hohlräume in der nächsten Nähe der Kugel, da die Lage der Ablösungsstelle und die Bewegungsrichtung der sich ablösenden Grenzschicht nicht merklich mit v_n variiert, solange $\frac{1}{2} \gamma v_n^2$ groß gegen p_n bleibt (vgl. Abschnitt 4. 1. am Schluß). Dagegen läßt er die ganzen Einschlußkegel weniger schlank erscheinen, als sie es bei gleichbleibender Geschwindigkeit wären, da die weiter hinten liegenden Querschnitte ja ihre Wassergeschwindigkeiten höheren Kugelgeschwindigkeiten verdanken, als dies am vorderen Ende der Fall ist. Auf die Geschwindigkeiten der Wasserbewegung an einem bestimmten

Querschnitt, deren Messung das wichtigste experimentelle Resultat des vorhergehenden Abschnitts bildet, ist die Abnahme der Kugelgeschwindigkeit ohne Einfluß, da hierfür nur die Kugelgeschwindigkeit beim Passieren des *betreffenden* Querschnitts maßgebend ist.

Zu b) Wir müssen den allmählichen Übergang vom Einschluß bis zum Stationärwerden verfolgen. Wir machen hierbei davon Gebrauch, daß beim stationären Vorgang in der Form der Fig. 7 die x -Komponenten der Geschwindigkeit v_x nirgends merklich übersteigen können. Das bedeutet bei ruhender Flüssigkeit und bewegter Kugel, daß die Geschwindigkeit des Wassers nicht negativ, d. h. rückwärts gerichtet werden kann, daß wohl aber schwache Vorwärtsbewegungen in der Nähe der Kugel zu erwarten sind, da die x -Komponente von v_x anfangs kleiner als v_x ist. Daraus folgt, daß etwaige rückwärtige Bewegungen des Wassers dem Übergang zwischen dem Kugeleinschlag und der Ausbildung der stationären Bewegung entsprechen müssen.

Diese Schlußfolgerungen stimmen mit den Versuchsergebnissen überein. Die nach hinten geschleuderten Wassermassen nehmen, wie der Anblick der Bilder 1—7 auf Taf. XVI und wie die Tabelle auf S. 705 zeigt, relativ zu den gesamten in Bewegung gesetzten Wassermassen tatsächlich immer mehr ab, je weiter die Kugel eindringt, je stationärer der Vorgang also wird. Eine Erklärung dieser *Übergangserscheinungen* kann erst in Frage kommen, wenn wir den stationären Vorgang ganz beherrschen.

Wir wollen jetzt das auf S. 710/711 entwickelte Schema auf unsere Versuche anwenden. Wir vertauschen die Rolle der Bewegung und der Ruhe, d. h. wir denken uns die Kugel durch ruhendes Wasser mit der Geschwindigkeit v_x von links nach rechts bewegt, wie es auf den Bildern der Taf. XVI der Fall ist. Wir haben dann die Aufgabe, die „absoluten“ Bewegungen des Wassers, d. h. die Bewegungen des Wassers in bezug auf seine ursprüngliche Ruhelage, nach Richtung und Geschwindigkeit zu bestimmen, können diese Aufgabe aber nicht unmittelbar lösen, da uns die Grundlage, die Hydrodynamik der Hohlraumerscheinungen, fehlt. Wir helfen uns so, daß wir den Hohlraum nach Form und Größe als gegeben annehmen, und daß wir diesen Hohlraum durch einen starren

Körper ersetzt denken, d. h. wir untersuchen statt der Bewegung der Kugel die Bewegung eines fischförmigen Gesamtkörpers nach Art der Fig. 7, welcher Kugel und Hohlraum umfaßt. Unsere Aufgabe ist dann auf ein bekanntes hydrodynamisches Schema ohne Hohlraumbildung zurückgeführt.

Um die Aufgabe nicht zu sehr zu komplizieren, nehmen wir eine mittlere konstante Geschwindigkeit an und wählen als Vorderende des Fischkörpers unmittelbar die durch Bild 3, Taf. XVI gegebene Form.¹⁾ Es handelt sich dann zunächst darum, die mathematischen Entstehungsbedingungen dieser Form kennen zu lernen. Da der Einschlußkegel des Bildes 3 der Taf. XVI ungefähr dem Hinterende eines Luftschiffs gleicht, so suchte ich unter den in dieser Beziehung rechnerisch untersuchten Formen und fand eine recht gute Übereinstimmung mit einem von Hrn. Fuhrmann²⁾ mathematisch behandelten Fall. Will man die absoluten Strömungslinien für diesen Körper als Vorderende konstruieren, so muß man auch eine bestimmte Annahme über das Hinterende des Gesamtkörpers machen, wenn dies für den Linienverlauf in der Nähe der Spitze, der uns hier hauptsächlich interessiert, auch von keinem allzu großen Einfluß ist. Wir wollen also den Körper nach hinten symmetrisch fortsetzen, so daß wir insgesamt die Form der Fig. 8, bei Beschränkung der Zeichnung auf eine Längshälfte, erhalten. Diesen Körper, der also etwa dem Gesamthohlraum entspricht, denken wir uns jetzt mit einer mittleren Geschoßgeschwindigkeit durch das Wasser bewegt. Wir können dann, in Anlehnung an die Fuhrmannsche Arbeit, das eingezeichnete Bild der absoluten Strömungslinien berechnen, welche uns die für einen bestimmten Moment

1) Wir vernachlässigen also die Abnahme der Kugelgeschwindigkeit und die durch diese Abnahme bedingte Änderung der Hohlraumform (vgl. S. 713). Dies macht nicht so viel aus, wie es im ersten Augenblick aussehen mag, da es uns hauptsächlich auf die Erscheinungen in der Nähe der Kugel ankommt, und da außerdem der später benutzte mathematische Körper mehr oder minder schlank gewählt werden kann, ohne daß dadurch das Bild der absoluten Strömungslinien (Fig. 8) geändert wird.

2) G. Fuhrmann, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen. Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft 5. Bd. 1911—12. S. 92, das Hinterende des Modells II.

gültige Richtung und Geschwindigkeit der Wasserteilchen geben (vgl. Fig. 8). Betreffs der Dichte der Linien beachte man die Lage der Ansatzstellen an der Quellstrecke.

Es ist übrigens kein Zufall, daß gerade diese Körperform, die in ihrem Vorderende einer gleichmäßig belegten langgestreckten Quelle und in ihrem Hinterende einer gleichmäßig belegten langgestreckten Senke entspricht, mit unserem Hohlraum übereinstimmt, wie sich aus folgenden Überlegungen ergibt. Die Kugel bewege sich in Fig. 4, Taf. XVII von 2 nach 3. Während dieses Weges schleudert sie die ruhenden Wassermassen radial zur Seite und zwar pro Zentimeter Weg einen ganz bestimmten Betrag. Diese Wassermassen sind in dem Augenblick des Bildes 3 auf Taf. XVI mit ihrer inneren

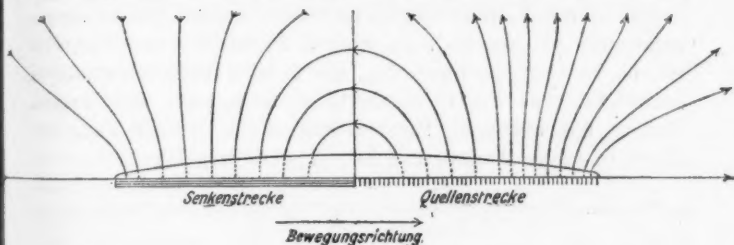


Fig. 8

Grenze gerade an der Oberfläche unseres Körpers angekommen. Ihre Bewegungsgeschwindigkeit und Bewegungsrichtung sind aber ganz dieselben, als wenn der Zentimeter Weg, von dem sie herkommen, dauernd gleiche Massen pro Sekunde hervorquellen ließe, deren tatsächliches Fehlen deswegen keine Rolle spielt, weil es nur innerhalb der Körpergrenzen zur Geltung käme. Wir müssen also außerhalb des Körpers tatsächlich die gleichen Stromlinien erhalten, als wenn es sich um eine gleichmäßig belegte Quelle im Fuhrmannschen Sinne handelte. Ganz analog kann die Strömung am Hinterende des Fischkörpers, welche dem Wiederkleinerwerden des Hohlraums unter dem Einfluß des Außendrucks entspricht, als die Wirkung einer langgestreckten Senke aufgefaßt werden. —

Wir wollen jetzt unmittelbar prüfen, wie weit das auf diesem Wege erhaltene Stromlinienbild sich mit den Versuchsergebnissen in Einklang bringen läßt. Es muß folgende Be-

dingungen erfüllen: a) die Richtung der Wasserbewegung ist in der Hauptsache rein radial, nur in der Nähe der Kugel besitzt sie eine nach vorwärts gerichtete Komponente. — b) die Wassergeschwindigkeiten sind der Kugelgeschwindigkeit proportional. — c) die Wassergeschwindigkeiten sind dem Radialabstand von der Achse umgekehrt proportional. — Alle diese Versuchsergebnisse werden durch die Fig. 8 tatsächlich richtig wiedergegeben. a) ergibt sich unmittelbar aus dem Linienverlauf der Quellstrecke, b) liegt im Wesen aller solcher Konstruktionen und c) läßt sich leicht folgendermaßen bestätigen. Die aus der Fig. 8 zu entnehmende Geschwindigkeit v_e an der Hohlraumgrenze ist, wenn ρ die radiale Entfernung (ρ S. 705) und a den Abstand zwischen zwei benachbarten Strömungslinien an der betreffenden Stelle bedeutet, der Fläche $2\pi\rho a$ umgekehrt proportional; da aber a im wesentlichen konstant ist, so ist v_e proportional $1/\rho$, wie es den Versuchsergebnissen entspricht. Die Fig. 8 scheint also tatsächlich den wahren Verlauf der absoluten Strömungslinien im Wasser nahe der Kugel in erster Annäherung richtig wiederzugeben.¹⁾

5. Die Bewegungserscheinungen des Wassers bei sehr verringerter Kugelgeschwindigkeit

Es ist von Interesse, unsere Versuche noch mit den Ergebnissen zu vergleichen, welche Hr. Worthington²⁾ für den Fall von Kugeln in Wasser aus geringer Höhe erhalten hat.

1) Obgleich unsere Betrachtung zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen geführt hat, und obgleich ich keinen Grund finden kann, welcher gegen den Ersatz des Hohlraums durch einen starren Körper spricht, möchte ich doch auf eine bedenkliche Konsequenz aufmerksam machen. Der obige fischartige Gesamtkörper hat Eigenschaften, welche den Folgerungen der klassischen Hydrodynamik widersprechen, er würde nämlich auch im reibungslosen inkompressiblen Medium einen Gesamtwiderstand finden, da die Kraftwirkungen auf die Vorderseite der Kugel nicht durch Kraftwirkungen auf der Hinterseite der Kugel ausgeglichen werden, und würde bei seiner Vorwärtsbewegung Arbeit leisten, ohne daß das Äquivalent dieser Arbeit anzugeben ist. Wenn ich trotz dieser Schwierigkeit die obigen Betrachtungen durchgeführt habe, so geschah das besonders auch deswegen, weil dieser Widerspruch vielleicht eine Anregung ist, die mathematische Theorie der Hohlraumerscheinungen in Angriff zu nehmen.

2) A. M. Worthington, *A Study of Splashes*, Longmans, Green and Co., London 1908.

Zwei seiner außerordentlich schönen Photogramme sind in Fig. 9a und b als Zeichnung wiedergegeben (Kugeldurchmesser 1,5 cm, Fallhöhe 281 cm). Obgleich die Geschwindigkeit wenig mehr als 1 Proz. der unserigen beträgt, ergeben sich die gleichen Erscheinungen: in a die radiale Garbe, in b die hinzukommende, senkrecht zur Wasserfläche gerichtete Garbe. Außerdem erkennt man auf diesen Figuren, daß die zweite Garbe hohl ist, also durchaus nicht alles Wasser des Hohlraumvolumens enthält. Nach den Untersuchungen Hrn. Worthingtons auf S. 92, findet sich das verdrängte Wasservolumen in einer allgemeinen, fast momentan erfolgenden Hebung des ganzen Wasserspiegels wieder. Die Form des „Einschußkegels“ entspricht ebenfalls durchaus unseren Versuchen; auf späteren, hier nicht wiedergegebenen Bildern, sieht man auch die Annäherung an die Kegelform und sogar den zylindrischen Endverlauf an der Grenzfläche. Nur insofern treten wesentliche Unterschiede auf, als bei diesen geringen Kräften die Oberflächenspannung eine große Rolle spielt, wie man andeutungsweise schon in Fig. 9b an der Zusammenziehung des Hohlzylinders erkennt.

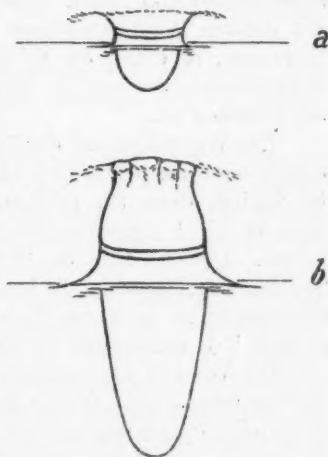


Fig. 9

Eine Frage bleibt noch zu beantworten: wie kommt es, daß schon bei diesen geringen Geschwindigkeiten ein Hohlraum entsteht? Dies erklärt sich dadurch, daß hier die Differenz zwischen dem Druck auf die Außenfläche des Wassers und dem Druck im Innern des Hohlraums gleich Null ist, so daß man formell von dem äußeren Luftdruck ganz absehen kann und für p_a im Sinne der obigen Überlegungen (Gleichung (1) usw.) nur den geringen, mit der Tiefe wachsenden Wasserdruck anzusetzen braucht.

6. Vergleich mit den Cranz-Kochschen Ergebnissen¹⁾

Herr Cranz faßt das Resultat seiner hauptsächlich mit K. R. Koch²⁾ gemeinsam durchgeführten Untersuchungen folgendermaßen zusammen:

„Die Bewegungsenergie des Geschosses wird ganz oder zum großen Teil auf den durchschossenen Körper übertragen; das Geschoß gibt von seiner Energie den nächstliegenden Teilchen des Körpers ab, diese wiederum einen Teil ihren Nachbarn usw. Die Teilchen des Körpers werden dadurch gewissermaßen zu Geschossen, die mit großer Geschwindigkeit wegfliegen, bis durch die Widerstände der Umgebung die Geschwindigkeit Null wird. Dabei setzen sich die Massen mit den größten Beschleunigungen nach denjenigen Richtungen in Bewegung, in denen der Widerstand einschließlich desjenigen Widerstandes, der von der Trägheit der Massen selbst herrührt, am kleinsten ist.

Das Wegschleudern der Teilchen des betreffenden Körpers erfolgt dann am stärksten und die scheinbare Explosivwirkung ist folglich dann am größten, wenn sich die Teilchen des Körpers leicht gegeneinander verschieben lassen (bei Flüssigkeiten). Dagegen fällt die Wirkung weg, wenn zwischen den Teilchen des Körpers große Reibung besteht (z. B. bei trockenem Quarzsand); im letzteren Falle wird die Geschoßenergie zum größten Teil unmittelbar in Reibungswärme umgewandelt.

Der Vorgang der scheinbaren Explosivwirkung ist also in der Tat sehr ähnlich demjenigen beim Zerreißen eines Körpers durch eine Sprengladung; nur mit dem Unterschied, daß die Massenteile ihre Beschleunigung beim Durchschießen durch den Stoß des Geschosses, beim Sprengen durch den Druck der erzeugten Gase erhalten. Auch bei Sprengungen bilden sich die Krater derart, daß ihre Achsen in die Richtung des kleinsten Widerstandes fallen.“

Diese allgemeine Erklärung ist durch unsere Versuche voll bestätigt, wie übrigens für jeden aufmerksamen Leser der Cranz-Kochschen Arbeit von vornherein zu erwarten war.

Im einzelnen weise ich auf folgende Übereinstimmungen

1) Vgl. Anm. 1. S. 697.

2) C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik Bd. I. S. 489. 1925.

und Nichtübereinstimmungen hin (die angeführten Bildnummern beziehen sich auf die Tafeln der Cranz-Kochschen Arbeit).

Übereinstimmungen. — Bild 1, 2, 3, 9 zeigen deutlich die schräg nach hinten fliegende Wassergarbe beim Einschuß, entsprechend unseren Bemerkungen auf S. 701. — Bei den späteren Phasen der Bilder 6 und 8 ist wieder, genau wie bei uns, die Wasserbewegung diametral nach hinten gerichtet. — Bild 3, 4, 5 beweisen, daß vor dem Geschoß nichts Merkliches geschieht, wie es bei den Bildern unserer Taf. XVI der Fall ist, und wie es noch deutlicher auf anderen nicht wiedergegebenen Aufnahmen unserer Untersuchung hervortritt. — Spätere Cranzsche Tonversuche¹⁾ zeigen die ursprünglich radiale Richtung der Teilchenbewegung in der Form der entstandenen Höhlung.

Nichtübereinstimmungen. — Die Wasserbewegungen nach rückwärts und nach vorwärts bei den Cranz-Kochschen Aufnahmen sind durchweg wesentlich mächtiger als bei unseren Versuchen.

Diese Unterschiede mögen teils auf der Verwendung von Langgeschossen beruhen, welche noch dazu häufig im Wasser zu Querschlägern werden, erklären sich aber in der Hauptsache dadurch, daß die Herren Cranz und Koch bei fast allen Versuchen das Wasser an allen Seiten mit festen Wänden umgeben. (Blechzylinder, Schweinsblase, Bleirohr.) Durch diese Hindernisse wird die Wasserbewegung von ihrer ursprünglichen Richtung abgedrängt und in die Hinter- und Vordergarbe hineingetrieben. Hierzu genügt schon der Widerstand der Schweinsblasenwandung, da die Geschwindigkeiten der Wassermassen in einiger Entfernung von der Geschoßbahn nach unsern Versuchen nicht übermäßig groß sind. Ähnlich muß auch eine Tonkugel wirken, da hier der durchschossene Körper als solcher einen gewissen Festigkeitswiderstand besitzt (Bild 13 und 14).

Alles in allem steht die von uns gefundene, in der Hauptsache radiale Bewegungsrichtung des Wassers also nicht im Widerspruch zu den Cranz-Kochschen Beobachtungen. Im Gegenteil, Hr. Cranz hebt ja selbst in der obigen Zusammenfassung die entscheidende Wirkung etwaiger Hindernisse auf die Bewegungsrichtung des Wassers ausdrücklich hervor.

1) Lehrbuch der Ballistik Bd. I. S. 490. 1925.

Zusammenfassung

1. Es wird eine Methode zur photographischen Aufnahme der beim Einschlagen von Kugeln in ruhendes Wasser auftretenden Erscheinungen ausgearbeitet.

2. Die erhaltenen Aufnahmen zeigen, wie sich hinter der Kugel ein Hohlraum bildet, und wie dieser Hohlraum in radialer Richtung weiter wächst, bis zum explosionsartigen Auseinanderfliegen der ganzen Wassermassen. Die Herausschleuderung von Wassergarben nach rückwärts und nach vorwärts erweist sich als eine Sekundärererscheinung.

3. Die erhaltenen Aufnahmen werden zur Bestimmung der Wassergeschwindigkeiten als Funktion der Kugelgeschwindigkeit und als Funktion des Abstandes von der Schußbahn rechnerisch ausgewertet. Es zeigt sich, daß die Radialgeschwindigkeit des Wassers der Kugelgeschwindigkeit direkt und dem Abstände von der Schußbahn indirekt proportional ist.

4. Es wird versucht, die erhaltenen Resultate wenigstens in ihren Grundzügen theoretisch zu verstehen.

5. Die erhaltenen Ergebnisse werden mit den Ergebnissen verwandter Untersuchungen (A. M. Worthington, C. Cranz und K. R. Koch) verglichen.

Zum Schlusse möchte ich auch hier Frl. cand. phys. M. Petter für ihre Hilfe bei den Auswertungen und Berechnungen, sowie Hrn. Dipl.-Ing. G. Käßner für seine Hilfe bei den hydrodynamischen Überlegungen meinen besten Dank aussprechen.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Techn. Hochschule, im August 1927.

(Eingegangen 4. September 1927)

2. *Der Einfluß freier Oberflächen und fester Wände auf schnell bewegte Kugeln im Wasser;*

von Carl Ramsauer

unter Mitarbeit von O. Beeck und G. Dobke

(Hierzu Tafel XVIII und XIX)

1. Die schräg auf die freie Wasseroberfläche geschossene Kugel prallt ab

Den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildet das Abprallen (Ricochetieren) der Geschosse von der Wasseroberfläche. Die Erscheinung ist äußerlich schon sehr lange bekannt, über den Verlauf des Vorganges im Wasser herrschte aber völlige Unklarheit.¹⁾ Es sollen hier zunächst einige Versuche beschrieben werden, welche ich zur Aufklärung des Vorganges bereits vor längerer Zeit durchgeführt habe, und zwar in erster Linie diejenigen Versuche, welche die Ermittlung der Geschosßbahn im Wasser zum Gegenstand haben.²⁾

Ich benutzte für meine Messungen gedrehte Messingkugeln von 11 mm Durchmesser, welche aus einem glatten Lauf, d. h. ohne Drall, mit einer Anfangsgeschwindigkeit von rund 620 m/sec unter beliebigen Winkeln auf die Wasseroberfläche eines großen Troges geschossen werden konnten.

Die Feststellung der Bahn in der Luft vor und nach dem Aufprallen war leicht durch gut einstellbare Papierschirme zu

1) E. de Jonquières ist meines Wissens der Einzige, welcher diese Frage nach gegebenen artilleristischen Daten quantitativ zu behandeln versucht hat. Er beschränkt sich aber auf den äußersten Grenzfall der Erscheinung, bei welchem die Kugel die Wasseroberfläche unter einem Winkel von etwa 1° trifft. (Sur le ricochet des projectiles sphériques à la surface de l'eau. Compt. rendus 97. S. 1278. 1883.)

2) Ich hatte mir diese Aufgabe bereits vor 25 Jahren gestellt und bis zu einem gewissen Grade gelöst (Über den Ricochetschuß, Kieler Dissertation 1903. — In dieser Arbeit als „Ric.“ zitiert). Wenn ich hier einleitend die damaligen Hauptresultate kurz wiederhole, so geschieht das deswegen, weil sie im folgenden neu verarbeitet werden und andererseits — da in keiner Zeitschrift veröffentlicht — nicht allgemein genug zugänglich sind.

erreichen, dagegen machte die Feststellung der Bahn im Wasser bedeutende Schwierigkeiten. Der hierfür benutzte Schirm muß die Bedingung erfüllen, daß er die Bewegung der Kugeln und des Wassers nicht wesentlich hemmt, daß er aber andererseits

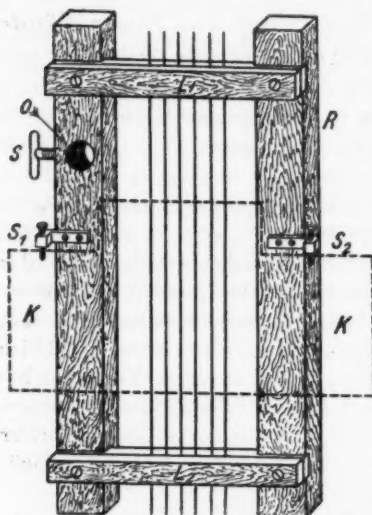


Fig. 1. (Maßstab 1 : 4)

nicht mehr zerstört wird, als daß sich die Spur der Kugel nachträglich noch mit genügender Genauigkeit feststellen ließe. Diese Bedingungen erfüllt die, auch für die neuen Versuche benutzte, Vorrichtung in Fig. 1. Eine Anzahl von Bleidrähten von 1 mm Durchmesser sind in Abständen von je 8 mm mittels der Leisten L_1 , L_2 auf dem Holzrahmen R festgeklemmt. Dieser Rahmen wird mit der Öffnung O auf eine parallel zur Schußrichtung über die Wasseroberfläche hinlaufende Eisenstange geschoben und an einer beliebigen Stelle der Schußbahn mittels der Schraube S quer zur Schußrichtung festgehalten, und zwar in solcher Höhe, daß die Spitzen der Schrauben S_1 und S_2 scharf auf die ruhende Wasseroberfläche eingestellt werden können. Die durchfliegende Kugel stantzt aus ein oder zwei Bleidrähten ein Stück heraus, wobei durch einen besonderen Versuch festgestellt wurde, daß die Bleidrähte bis zu diesem Augenblick noch gänzlich unverändert sind; die nachfolgende explosionsartige Wasserbewegung wickelt die durch den Schuß getrennten Drahtenden um L_1 und L_2 . Nimmt man nun nach dem Schuß die ganze Vorrichtung aus dem Wasser, legt ein Stück Karton KK auf den Rahmen, markiert auf dem Karton durch ein an S_1 und S_2 gelegtes Lineal die Wasseroberfläche und streckt dann die durchgeschossenen Bleidrähte sorgfältig gerade, so erhält man die nötigen Daten für die Festlegung des Kugelmittelpunktes.

In dieser Weise kann man durch eine Reihe solcher Netze in passenden Abständen die Geschosßbahn im Wasser feststellen. In Fig. 2, Taf. XVIII sind die Messungen von 5 Versuchareihen (markiert durch die Ziffern 1 bis 5) eingetragen; die Auftreff- und Abprallpunkte sind dabei aus der mittels Papierschirmen bestimmten Luftbahn der Kugel ermittelt. Wie man sieht, arbeitet diese zunächst recht roh erscheinende Methode mit einer ganz überraschenden Genauigkeit.

Auf diese Weise wurden — in jedem Fall aus 5 Einzelkurven — die Daten der Tab. 1 durch graphischen Ausgleich gewonnen. Die Abszissen rechnen vom Auftreffpunkte, die Ordinaten von der Wasseroberfläche bis zum unteren Kugelrand; α_1 und α_2 bedeuten den Aufprall- bzw. Abprallwinkel. Die Geschosßbahnen selbst sind für die Versuchareihen 4, 5, 6, 7, 8 in Fig. 3, Taf. XIX wieder gegeben, jedoch der Übersichtlichkeit wegen ohne Markierung der Versuchspunkte; die eingezeichneten $\times \times$ stellen die Werte der Tabelle dar.

Tabelle 1¹⁾

Abszissen (cm)	0	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	Abszisse des Abprall- punktes (cm)
α_1/α_2	Ordinaten des unteren Kugelrandes in Zentimeter																
1°0'/1°0'	0	0,07	0,08														12,2
1°59'/1°55'	0	0,14	0,15	0,08													16,1
3°12'/2°48'	0	0,20	0,22	0,08													16,8
4°33'/3°51'	0	0,25	0,37	0,29	0,06												21,1
1°56'/4°37'	0	0,31	0,50	0,51	0,40	0,16											27,5
6°33'/5°36'	0		0,80		1,12		1,20	1,00	0,56								58,3
1°29'/5°53'	0		0,78		1,30		1,58	1,75	1,78	1,70	1,48	1,00	0,38				95,1
7°0'/—	0		0,92		1,63		2,08	2,41	2,68	2,82	2,86	2,88	2,87	2,84	2,82	2,78	—
8°0'/—	0		1,08		1,96		2,72	3,42	4,14	4,78	5,38	5,94	6,46	6,98	7,44	7,87	—

1) Die Ergebnisse der Tabelle 1 stimmen mit den Angaben E. de Jonquières (a. a. O.) für weit größere Kugeldurchmesser (16 cm gegen 1,1 cm!) in folgenden Punkten recht gut überein:

- Die Eintauchtiefe wird bei 1° auf *weit* weniger als 2 cm, d. h. auf *weit* weniger als $\frac{1}{8}$ des Durchmessers berechnet, während sie bei uns $\frac{1}{16}$ des Durchmessers beträgt.
- Als Grenzwinkel des Abprallens werden 6° angegeben, gegen 6° 29' bei uns.
- Die Abprallwinkel werden stets kleiner als die Aufprallwinkel gefunden, wie es auch bei uns der Fall ist. —

Das Resultat dieser Versuche ist überraschend: die Kugel streift nicht nur die Wasseroberfläche, sondern sie taucht wesentlich unter Wasser und steigt dann doch wieder hoch. Man beachte namentlich die Geschosßbahn Nr. 7 in der Tabelle (in Fig. 3 nicht zu Ende gezeichnet), bei welcher die Kugel nach *vollständigem* Untertauchen und nach Durchmessung einer Wasserbahn von 95 cm (!) Länge das Wasser doch wieder verläßt.

Dieses Ergebnis legte die wenigstens formell berechnete Frage nahe, ob Abstieg und Aufstieg in irgendeiner Weise miteinander verknüpft sind, derart, daß beim Abstieg Kräfte entwickelt werden, die den Aufstieg bedingen, wie es beim Abprallen der Kugel von einer festen Wand der Fall sein würde. Diese Frage führte zu folgendem Versuch: In die Wasserbahn der Kugel wird ein durch dünnes Ölpapier begrenzter Luftraum von etwa 5 cm Länge so eingeschaltet, daß die Kugel nach Durchlaufung des absteigenden Astes, d. h. wenn die Bewegungsrichtung horizontal geworden ist, das Wasser verläßt, horizontal durch den Luftraum fliegt und dann wieder parallel zur Wasseroberfläche in das Wasser eintritt. Das Ergebnis dieses Versuches ist in Fig. 4, Taf. XIX wiedergegeben: der Luftraum ist ohne Einfluß auf den Wiederaufstieg der Kugel.

2. Die parallel zur freien Grenzfläche eingeschossene Kugel wird zu dieser hingedrängt

Aus der Untersuchung des Ricochetschusses ergibt sich also eine einfachere Erscheinung: die parallel zur freien Wasseroberfläche eingeschossene Kugel steigt hoch. Diese Erscheinung, welche schon in Ric. § 7 am Schluß anhangsweise zum damaligen Hauptproblem untersucht worden ist, soll hier jetzt ausführlicher behandelt werden, d. h. es sollen die Aufstiegskurven für verschiedene Bedingungen experimentell genau bestimmt und dann rechnerisch ausgewertet werden, um so ein Bild von den wirkenden Kräften in Abhängigkeit von Geschwindigkeit und Wassertiefe zu erhalten. Eine hierzu unerläßliche Vorarbeit ist schon durch eine selbständige, in dem hiesigen Institut durchgeführte Untersuchung über die Geschwindigkeitsverluste der Kugel im Wasser vorweg genommen worden.¹⁾

¹⁾ W. Bauer, Das Widerstandsgesetz schnell bewegter Kugeln im Wasser, Ann. d. Phys. 80. S. 232. 1926.

Die Anordnung ist aus Fig. 5 ersichtlich. Die Kugel trifft horizontal wie möglich, wobei kleinere Abweichungen von einigen Bogenminuten durch Anwendung von Papierschirmen und optischen Hilfsmitteln bestimmt wurden, auf die senkrechte, aus dünnem Ölpapier *P* bestehende Grenzfläche des Wassers im Troge *T*, fliegt längs der Wasseroberfläche hin und zeichnet ihre mehr und mehr aufsteigende Bahn (stark überhöht gezeichnet!) in einer Reihe von Bleigittern ab. Das Gewehr ist noch das gleiche wie in Ric., als Geschosse wurden jetzt aber Stahlkugeln von 11,003 mm Durchmesser und 5,42 g Gewicht benutzt, wie sie für Kugellager Verwendung finden. Die durchschnittliche Anfangsgeschwindigkeit betrug 630 m/sec.

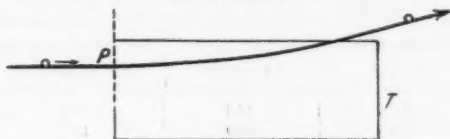


Fig. 5

Die Resultate sind in Fig. 6, Tat. XVIII wiedergegeben, wobei jede Kurve das Mittel aus mehreren Einzelreihen darstellt. Die Meßpunkte, die untereinander gerade so gut übereinstimmen, wie in Fig. 2, sind der Übersichtlichkeit wegen fortgelassen. Die Bahn der Kugel vor dem Einschlag ins Wasser und nach dem Aufstieg aus dem Wasser wird durch Schirme besonders bestimmt, ersteres, um etwaige Abweichungen von der Horizontalrichtung zu erkennen, letzteres zur besonderen Festlegung des Punktes, in welchem die Kugel die Wasseroberfläche wieder verläßt. Als Gesamtergebnis ergibt sich, wenn man als „Einschußtiefe“ den Abstand des unteren Kugelrandes von der Wasseroberfläche bezeichnet: die Kugel steigt bis zu einer Einschußtiefe von 2,2 cm noch aus dem Wasser heraus, bis 3 cm zeigt sie noch einen kräftigen Anstieg, bei 4,5 cm sind nur in den Originalkurven noch Spuren eines Anstieges bemerkbar.¹⁾

Außer diesen vollständigen Bahnmessungen bei gleicher Geschwindigkeit wurden noch einfache Ablenkungsversuche mit variierter Geschwindigkeit in folgender Form durchgeführt.

1) In Ric. § 7 war die Grenze bei 5 cm erreicht, während bei 4,5 cm noch deutlich ein Anstieg hervortrat.

Eine Wasserwand von 8,2 cm Länge in der Schußrichtung und von 18 cm Breite bei 12 cm Höhe, welche durch die Ölpapierwände eines Holzgestells gehalten ist, wird in verschiedener „Einschußtiefe“ mit varierten Geschwindigkeiten in möglichst horizontaler Einschußrichtung durchgeschossen. Gemessen werden mit [Hilfe äußerer Schirmvorrichtungen, unter entsprechenden Korrekturen für die Krümmung der Flugbahn in Luft, die Eintrittsrichtung und die Austrittsrichtung gegenüber der Horizontalen. Die so erhaltenen Winkeldifferenzen sind in Tab. 2 zusammengestellt; sie bestätigen zunächst das Gesamtergebn der Bahnmessungen.

Tabelle 2

„Einschußtiefe“ in cm	Geschwindigkeit in m/sec	Richtungsänderung in Minuten
0,55	440	189
0,65	630	187
1,20	660	39
1,56	580	52
1,67	270	30
2,09	410	21
2,2	280	10
2,35	520	15
2,35	280	12
2,4	570	14
2,5	320	22
2,45	180	13
2,75	350	10
3,0	260	9
3,3	520	8

3. Die parallel zu einer festen Grenze eingeschossene Kugel wird von dieser fortgedrängt

Es ist naheliegend, nach diesen Ergebnissen auch den Einfluß einer festen Wand zu untersuchen, um so mehr, als die klassische Hydrodynamik über diesen Einfluß ganz bestimmte Angaben liefert.

Fig. 7 zeigt die Versuchsanordnung. *T* ist der bereits früher benutzte Wassertrog. *S* ist eine rund 50 cm lange, schwere Eisenbahnschiene, welche auf kleineren Querstücken fest montiert ist. Ihre an sich untere, völlig ebene Fläche von 10 cm Breite ist nach oben gekehrt und genau horizontal eingestellt, ihre

und Ö. ver- iten Ge- nter wahn gen- anzen das
 vordere Stirnfläche ist unmittelbar an die Papierfläche P heran- geschoben. Die Wasserhöhe über der Schiene beträgt etwa 10 cm, so daß die freie Wasseroberfläche ohne Einfluß auf die Kugel bleibt. Die Bahn der Kugel wird nur an den Punkten 1 und 2 bestimmt. In 1 dienen hierzu äußere Schirme unter

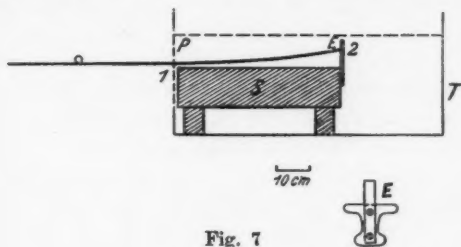


Fig. 7

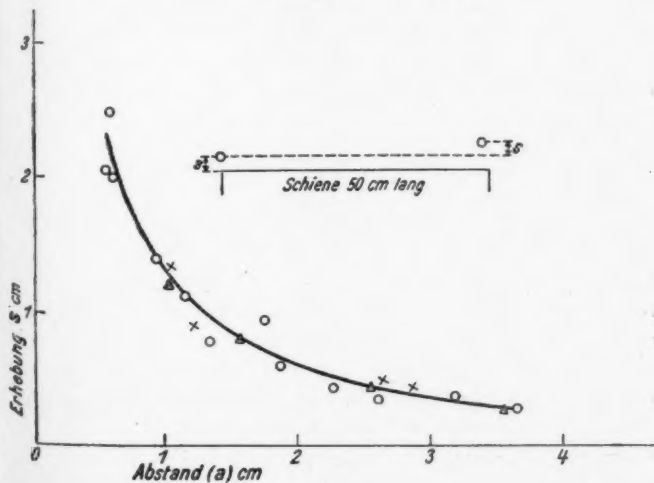


Fig. 8

Benutzung einfacher optischer Hilfsmittel, in 2 wurde zunächst ein 4 cm breiter, 1 cm dicker, fest mit der Schiene verbundener Streifen Schmiedeeisen E (vgl. auch die Querschnittszeichnung) verwandt, welcher nicht zu kräftige, gut meßbare Eindrücke von der schon stark geschwächten Kugel erhält. Da aber das Bedenken entstand, daß dieser ziemlich breite Streifen selbst auf die Be-

wegung der Kugel von merklichem Einfluß sein könnte, wurde er zur Kontrolle durch einen kleinen Streifen Messing von 3 mm Breite und 10 mm Dicke (in der Schußrichtung) ersetzt. Wird dieses Messingstückchen nur lose durch zwei leicht durchscherbare Aluminiumbolzen von 2 mm Stärke mit der Schiene verbunden, so ist die Deformation durch die Kugel nicht so groß, daß man nicht den Abstand zwischen Kugelspur und Schienenoberfläche genau bestimmen könnte. Der einzige Nachteil dieser Anordnung ist der, daß man wegen der Schmalheit des Messingstreifens als Ziel für die Kugel mit einigen Fehlversuchen zu rechnen hat. — Weitere Meßpunkte zwischen Anfang und Ende der Schiene sind nicht vorgesehen, um die Oberfläche der Schiene nicht störend zu unterbrechen.

Die Versuchsergebnisse sind in der Kurve Fig. 8 wiedergegeben. Die $\circ \circ$ beziehen sich auf den breiten Eisenstreifen, die $\times \times$, welche als Kontrollpunkte anzusehen sind, auf den schmalen Messingstreifen; ein prinzipieller Unterschied zwischen den beiden Reihen ist nicht zu bemerken.¹⁾

Die Kugel wird also von der festen Wand fortgedrängt.

4. Berechnung der in 2 und 3 auftretenden Kräfte als Funktion der Kugelgeschwindigkeit und der Grenzflächenabstände

1. Einfluß der freien Grenzfläche

Wir behandeln zuerst den Einfluß der freien Grenzfläche auf die parallel zu ihr eingeschossene Kugel. Die Kugel wird von ihrer ursprünglich horizontalen Richtung nach oben abgedrängt und zugleich in der Bewegungsrichtung gebremst, es muß also eine schräg von vorn und unten kommende Kraft K auf die Kugel wirken. Diese physikalisch gegebene Gesamtkraft wollen wir zerlegen in eine Komponente in Richtung der Bahn und in eine Komponente senkrecht zur Richtung der Bahn, d. h. in eine bremsende Teilkraft und in eine ablenkende Teilkraft, und zwar rein formell, ohne damit die selbständige Realität dieser Kräfte behaupten zu wollen.

Wir führen ein Koordinatensystem xy ein (Fig. 9).

Die x -Achse entspricht der freien Oberfläche, die y -Achse der freien Einschußfläche, welche von der Kugel zur Zeit $t = 0$ in horizontaler Richtung passiert werden möge. Die x - und

1) Die $\triangle \triangle$ sind berechnete Werte; vgl. S. 734.

y -Koordinaten beziehen sich auf den Kugelmittelpunkt. Die Kugelmasse sei m , die Kugelgeschwindigkeit sei v , der Winkel zwischen x -Richtung und Kugelrichtung sei α , im Uhrzeigersinn positiv gerechnet.

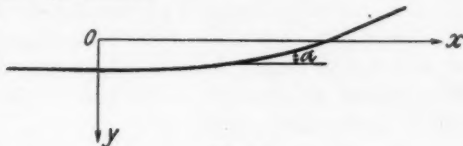


Fig. 9

Wir beschränken die Untersuchung auf die Nähe von $x=0$, also auf denjenigen Teil der Bahn, wo der Kurvenverlauf noch nahezu horizontal ist. Unter diesen Voraussetzungen entsprechen die Kräfte in Richtung x und y K_x bzw. K_y der bremsenden und der ablenkenden Teilkraft im obigen Sinne; α bleibt sehr klein, α und $\operatorname{tg} \alpha$, sowie v und v_x brauchen nicht unterschieden zu werden.

Wir erhalten so folgende Gleichungen:

$$(1) \quad K_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$(2) \quad K_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$(3) \quad K_y = m \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right]$$

$$(4) \quad K_y = m \left[\frac{\partial \operatorname{tg} \alpha}{\partial x} \cdot v_x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right]$$

$$(5) \quad K_y = m \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot v^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Für das untersuchte Gebiet wird der zweite Summand $= 0$ ¹⁾, es bleibt also:

$$(6) \quad K_y = m \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot v^2$$

1) Wendet man diesen Ansatz auf ein großes x an, d. h. auf ein schon merklich schräg nach oben verlaufendes Stück der Kurve, so wird der zweite Summand nicht 0, er erhält aber eine ganz einfache Bedeutung:

$\operatorname{tg} \alpha \cdot m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$ ist in erster Annäherung nichts anderes wie die y -Komponente der in tangentialer Richtung wirkenden Bremskraft, welche bis zu den größten in Betracht kommenden Werten von α (etwa 4°) nicht merklich von $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ abweicht.

Für die bremsende Kraft K_x können wir einen oberen Grenzwert aus den Bauerschen Widerstandsmessungen (a.a.O.) in unbegrenztem Medium berechnen, z. B. $360 \cdot 10^6$ Dyn für die Geschwindigkeit von 500 m/sec. Für die Berechnung der ablenkenden Kraft K_y nach Gleichung (6) würden uns die Versuche im Abschnitt 1 und 2 für jeden Einzelfall das nötige Material liefern. Wir wollen aber unsere Aufgabe allgemeiner auffassen und die Auftriebskraft als Funktion der Einschußtiefe und der Geschwindigkeit darzustellen versuchen.

Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst wissen, wie $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ von diesen beiden Größen abhängt. Wir tragen versuchsweise alle Werte $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, deren Berechnung aus den experimentellen Ergebnissen der Abschnitte 1 und 2 sogleich näher besprochen werden soll, als Ordinaten über der „Einschußtiefe“ als Abszisse auf, und berücksichtigen die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten nur insofern, als wir zu jedem Punkt $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ den zugehörigen Wert v als Ziffer, in der Einheit 10 m/sec, hinzufügen (vgl. Fig. 10).

Bei der Berechnung der $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ gehen wir entsprechend den obigen Voraussetzungen nur von solchen Bahnpunkten aus, in welchen die Kurve horizontal verläuft, müssen aber natürlich ein endliches und zwar ein verhältnismäßig großes ∂x benutzen.¹⁾ Wir wählen $\partial x = 8,2$ cm, um die Versuche der Tab. 2, S. 726 unmittelbar verwenden zu können. Wir haben dann drei Gruppen von Werten:

a) Die Werte, die sich aus Tab. 2 entnehmen lassen ($\times \times$ in Fig. 10).

b) Die Werte, die aus den Kurven der Fig. 6 als Differenz zwischen dem Bahnwinkel am Anfang und am Ende der ersten 8,2 cm erhalten werden. ($\circ \circ$ in Fig. 10.) Der Anfangswert von α ist experimentell möglichst gleich 0 gemacht, kleinere Abweichungen hiervon sind besonders bestimmt und berücksichtigt, der Endwert von α wird den Originalkurven unter passender Überhöhung und entsprechender Umrechnung mittels Spiegelderivator entnommen.

c) Die Werte, die aus den Kurven der Tab. 1 als Differenz

1) Über die Fehler, die durch die endliche Größe von ∂x entstehen, vgl. Anm. 1, S. 733.

zwischen dem Bahnwinkel am tiefsten Punkt der Kurve und dem Bahnwinkel am Ende der vom tiefsten Punkt an rechnenden 8,2 cm-

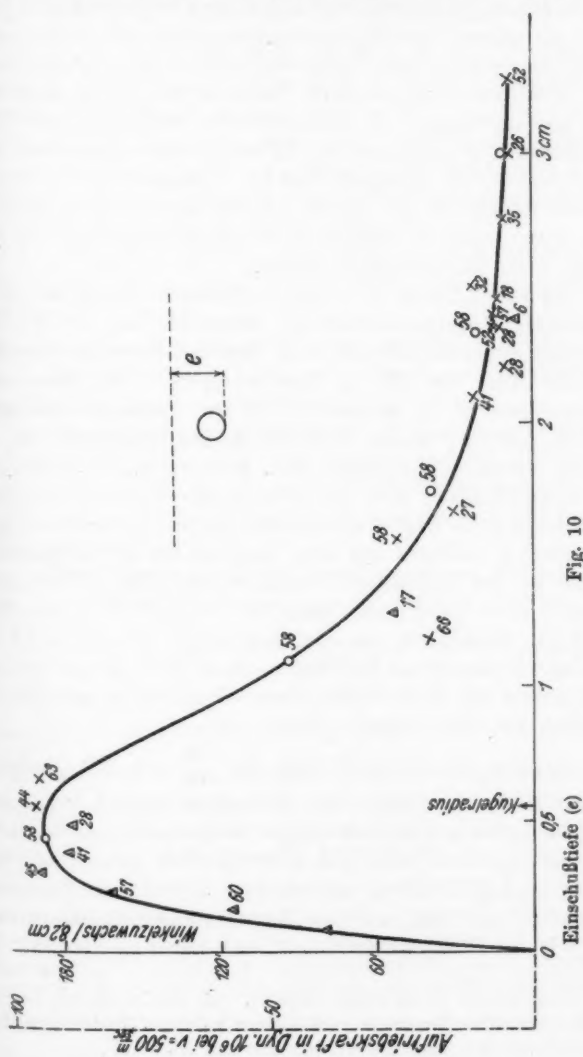


Fig. 10

Strecke erhalten werden ($\triangle\triangle$ in Fig. 10). Der Anfangswert von α ist hier 0, der Endwert von α wird wie unter b) bestimmt. Bei den ersten beiden Kurven der Tab. 1 muß an Stelle von $\partial x = 8,2$ cm, $\partial x = 6,1$ cm und $\partial x = 8,05$ cm benutzt werden, da die Kurven zu kurz sind; die gefundenen Werte sind auf $\partial x = 8,2$ cm umgerechnet.

Alle diese Werte sind als Funktion der Einschußtiefe e in Fig. 10 eingetragen. Als Einschußtiefen sind diejenigen Werte gewählt, welche der Mitte der 8,2 cm-Strecke entsprechen, und zwar nach S. 725 gerechnet von der Wasseroberfläche bis zum unteren Kugelrand, um negative Werte zu vermeiden, während das obige y vom Mittelpunkt der Kugel an rechnete ($e = y + \rho$, wenn ρ der Kugelradius bedeutet).

Zu jedem Punkt ist — in den Einheiten 10 m/sec — die zugehörige Kugelgeschwindigkeit vermerkt, wie sie sich aus der Anfangsgeschwindigkeit und dem Geschwindigkeitsverlust bis zur Mitte der 8,2 cm-Strecke ergibt. Bei Berechnung dieser Werte ist zu bedenken, daß die Widerstandskonstante in der Nähe der Wasseroberfläche kleiner anzusetzen ist, als es den Versuchsbedingungen Hrn. Bauers (a. a. O.) entspricht. Für a) und b) macht dies auf die kurze Strecke von 4,1 cm nichts Merkliches aus. Für c) würden sich die zu benutzenden Widerstandsziffern vielleicht aus dem Vergleich der Abprallgeschwindigkeit mit der Aufprallgeschwindigkeit nach Ric. § 5 berechnen lassen¹⁾, doch wurden der Einfachheit wegen für die Kurven 1 bis 3 die Mittelwerte aus Ric. eingetragen und für 4—8 die aus der Bauerschen Konstante berechneten Werte benutzt; man erhält auf diese Weise obere Grenzwerte, was aber im Hinblick auf das Folgende einerlei ist.

Aus der Fig. 10 ergibt sich, daß $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ von der Geschwindigkeit *völlig unabhängig* ist. Denselben Schluß kann man übrigens schon aus der fast völligen Gleichheit des absteigenden und aufsteigenden Astes der Abprallkurven ziehen; vgl. z. B. in Fig. 11, Taf. XVIII die aufeinandergelegten beiden Zweige der Kurve Nr. 7 aus Tab. 1, welche völlig miteinander übereinstimmen, obgleich die Endgeschwindigkeit hier nur rund 10 Proz. der

1) Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die in Ric. § 5 benutzte Geschwindigkeitsmeßmethode nach meinen späteren Erfahrungen nicht ganz frei von systematischen Fehlern gewesen ist.

Anfangsgeschwindigkeit beträgt. Ein kleiner Unterschied höherer Ordnung scheint allerdings doch zu bestehen, da die Abprallwinkel stets etwas kleiner als die Aufprallwinkel sind.

Das $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ der Kurve Fig. 10 gilt also für *alle* Geschwindigkeiten, so daß die auftreibende Kraft K_y für jede Einschußtiefe und für jede Geschwindigkeit ohne weiteres aus der obigen Gleichung (6)¹⁾ berechnet werden kann. Nimmt man eine bestimmte Geschwindigkeit, z. B. 500 m/sec an, so gibt die Kurve Fig. 10 nach der beigefügten zweiten Ordinatenskala unmittelbar die K_y als Funktion der Einschußtiefe an.

Zum Vergleich sei bemerkt, daß die Widerstandskraft bei dieser Geschwindigkeit für unbegrenztes Medium nach Hrn. Bauer $360 \cdot 10^6$ Dyn beträgt.

Wir haben also folgendes Gesamtergebnis erhalten:

- a) Die auftreibende Kraft ist bei gegebener Einschußtiefe dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional.
- b) Die auftreibende Kraft steigt bei gegebener Geschwindigkeit zunächst mit wachsender Einschußtiefe an, erreicht ein Maximum, wenn die Kugel sich *halb* im Wasser befindet, und sinkt darauf bei weiter wachsender Einschußtiefe zuerst schnell, dann langsamer ab.
- c) Die auftreibende Kraft erreicht in ihrem Maximalwerte etwa $\frac{1}{4}$ der Widerstandskraft in unbegrenztem Medium.

1) Hierbei vernachlässigen wir den zweiten Summanden der Gleich. (5) trotz der merklichen Größe von $\partial x = 8,2$ cm, wir müssen also noch untersuchen, wie groß der hierdurch bedingte Fehler ist. Der $\tan \alpha$ des zweiten Summanden ist im Durchschnitt gleich $\frac{\partial \alpha}{2}$, da wir ja von $\alpha = 0$ ausgehen, das

Produkt $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$ des zweiten Summanden ist im Maximum gleich der Widerstandskraft im unendlichen Medium, welches sich aus den Bauerschen Werten beim Übergang zum absoluten Maßsystem zu $0,145 \text{ gcm}^{-1} \cdot v^2$ berechnet. Daraus ergibt sich im Maximum das Verhältnis des zweiten Summanden zum ersten Summanden $\frac{\partial \alpha}{2} \cdot 0,145 \text{ gcm}^{-1} \cdot v^2 : m \cdot \frac{\partial \alpha}{8,2 \text{ cm}} \cdot v^2 = 0,11$.

Wir machen also im Maximum einen Fehler von $\frac{11}{100}$, und zwar gilt diese Maximalzahl für größere Einschußtiefen, d. h. dort, wo das Medium schon als allseitig unendlich betrachtet werden kann, während die Fehler bei kleineren Einschußtiefen wesentlich geringer sind. Alles in allem bleibt die obige Vernachlässigung innerhalb der Versuchsschwankungen von $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, welche prozentual gerechnet ebenfalls mit der Einschußtiefe wachsen.

2. Einfluß der festen Grenzfläche

Die abstoßenden Kräfte der festen Grenzfläche im Abschnitt 3 sind nicht so unmittelbar berechenbar, da wir hier statt der ganzen Bahnkurven nur den Gesamtweg haben, welchen die Kugel senkrecht zur Schiene unter dem Einfluß der abstoßenden Kräfte während ihrer ganzen Flugzeit längs der Schiene zurücklegt.

Wir wollen versuchen, die abstoßende Kraft für eine bestimmte Geschwindigkeit v als Funktion von y , dem Abstand des Kugelmittelpunktes von der festen Grenze, zu berechnen, $K = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = f(y)$ (Fig. 12). Wir nehmen an, daß die Kräfte wieder v^2 proportional sind, daß also auch hier die Form der Bahnkurve innerhalb des benutzten Geschwindigkeitsbereichs

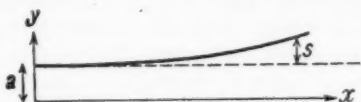


Fig. 12

von v unabhängig ist. Die gemessenen s gelten dann auch für die konstante Geschwindigkeit v , die man sich ja durch eine äußere Einwirkung auf die Kugel aufrecht erhalten denken könnte. Wir wollen, um einen bestimmten Zahlenwert zu haben, v wieder gleich 500 m/sec setzen, wodurch wir eine Flugzeit längs der Schiene von 0,001 sec erhalten.

$f(y)$ hat jetzt die Bedingung zu erfüllen, daß die Kugel für jedes gegebene a (vgl. auch Fig. 8) das gemessene s innerhalb 0,001 sec zurückgelegt.

Wir geben $f(y)$ versuchsweise verschiedene Formen und prüfen die Brauchbarkeit von $f(y)$, indem wir die betreffenden s in eine Anzahl von Abschnitten, z. B. 5, zerlegen, für jeden Abschnitt aus $f(y)$ die Flugzeit berechnen und die Summe der so erhaltenen Teilzeiten mit 0,001 sec vergleichen. Hierbei hat sich der Ansatz $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot f(y) = \frac{1,87 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 \cdot \text{sec}^{-2}}{y - \varrho}$ als mit den Versuchswerten verträglich erwiesen, wie aus der Lage der berechneten Punkte $\triangle \triangle$ in Fig. 8 hervorgeht; ϱ bedeutet hierbei den Radius der Kugel, $y - \varrho$ also den Abstand des unteren Kugelrandes von der festen Grenzfläche. Es ist damit natürlich

nicht gesagt, daß $f(y)$ in dieser Form eine theoretische Bedeutung besitzt, der so geprüfte Ansatz genügt aber zur Berechnung der gesuchten Kräfte. Für $y - \rho = 1$ cm erhält man $K = 5,42 \cdot 1,87 \cdot 10^6$ Dyn $= 10 \cdot 10^6$ Dyn.

3. Vergleich der freien und der festen Grenzfläche

Es ist von Interesse, die Abstoßungskräfte der festen Grenzfläche mit den Anziehungskräften der freien Oberfläche für gleiche Mittelpunktsabstände y zu vergleichen. Erstere sind dabei der vorstehenden Formel, letztere der Originalkurve von Fig. 10 zu entnehmen. Dabei ist im letzteren Falle zu berücksichtigen, daß $y - \rho$ der Formel dem Abstand des oberen Kugelrandes von der Wasseroberfläche, also $e - 2\rho$ entspricht; so sind z. B. die Formelwerte für $y - \rho = 2$ cm mit der Auftriebskraft der Fig. 10 für die Abszisse $e = 3,1$ zu vergleichen, da $2\rho = 1,1$ cm ist. Man erhält folgende Tabelle:

Tabelle 3

$y - \rho$ in cm	Kraft in 10^6 Dyn	
	freie Grenzfläche	feste Grenzfläche
0,5	- 21	+ 20
1,0	- 10	+ 10
1,5	- 6,5	+ 6,7
2,0	- 4,5	+ 5

Die Wirkungen der freien und der festen Grenzflächen stimmen also — bei entgegengesetzter Richtung — in ihren Absolutgrößen und in ihrer Abhängigkeit vom Abstand miteinander überein. Die überraschende Güte der Übereinstimmung ist dabei insofern ein bloßer Zufall, als man die Kurven der Figg. 10 und 8 innerhalb der Versuchsschwankungen auch etwas anders hätte legen können.

Da eine so weitgehende Übereinstimmung reell sein muß, so ist damit auch die obige Annahme gerechtfertigt, nach welcher die Kraftwirkung der festen Grenzfläche ebenfalls dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sein sollte. Übrigens würde auch ohne das die Zulässigkeit dieser Annahme kaum zweifelhaft sein, da die experimentell untersuchten Kräfte dieser Art, nämlich der Gesamtwiderstand der Kugel nach Hrn. Bauer (a. a. O.), sowie unsere Anziehung der Kugel

durch eine freie Oberfläche, und auch die von der klassischen Hydrodynamik berechneten Widerstandskräfte ebenfalls alle dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sind.

5. Hydrodynamische Bemerkungen zu den Versuchsergebnissen

Unsere Versuche haben zwei bisher noch nicht bekannte hydrodynamische Erscheinungen ergeben: die parallel zu einer Grenzfläche sich bewegende Kugel wird „angezogen“, wenn diese Grenzfläche frei ist, und wird „abgestoßen“, wenn diese Grenzfläche fest ist. Die erstere Erscheinung ist ganz neuartig, die zweite Erscheinung erinnert zunächst an die bekannte hydrodynamische Wirkung einer festen Wand auf eine Kugel, ist aber gleichfalls etwas Neues, da es sich dort im Gegensatz zu unseren Versuchen um eine Anziehung handelt.¹⁾

Es fragt sich jetzt, ob die gefundenen Erscheinungen bei Idealisierung der Flüssigkeit mit den mathematischen Hilfsmitteln der klassischen Hydrodynamik zu behandeln sind. Dies ist nicht der Fall, da die benutzten Geschwindigkeiten so groß sind, daß die Voraussetzungen der klassischen Hydrodynamik durchbrochen werden. Es bildet sich nämlich unter dem Einfluß dieser hohen Geschwindigkeiten hinter der Kugel ein *Hohlraum* mit dem Druck $p = 0$, wie ich dies in der hier unmittelbar vorhergehenden Annalenarbeit²⁾ experimentell und theoretisch näher behandelt habe. Eine mathematische Theorie dieses hydrodynamischen Sondergebietes liegt leider bisher nicht vor, so lohnend eine solche auch bei der theoretischen und praktischen Wichtigkeit dieser Erscheinungen sein würde.

Dagegen liefern uns die Versuchsergebnisse von Ann. I wenigstens einen ersten Einblick in die Wechselwirkungen zwischen Kugel und Wasser, die bei Hohlraumbildungen auftreten. Fig. 13 stellt im Anschluß an Fig. 8 der Ann. I das

1) Die Verwandtschaft mit der neuerdings von Hrn. Liebestor (Ann. d. Phys. 82. S. 541. 1927) experimentell untersuchten Abstoßung einer Kugel von einer festen Wand ist eine rein äußerliche, da es sich dort um sehr langsame Bewegungen in reibender Flüssigkeit handelt, bei welchen die für unsere Versuche charakteristischen Hohlraumbildungen nicht in Frage kommen.

2) Die Bewegungserscheinungen des Wassers beim Durchgang schnell bewegter Kugeln. Ann. d. Phys. 84. S. 697. 1927; im folgenden als Ann. I zitiert.

absolute Strömungsbild für den Durchgang einer schnell bewegten Kugel durch das Wasser dar, nämlich dasjenige Bild, welches für jedes Wasserteilchen in der Umgebung der Kugel die augenblickliche Richtung und Größe der Geschwindigkeit absolut, d. h. bezogen auf die ursprüngliche Ruhelage des Wassers wiedergibt.¹⁾ Wie man sieht, schleudert die Kugel das ursprünglich ruhende Wasser radial auseinander, muß also

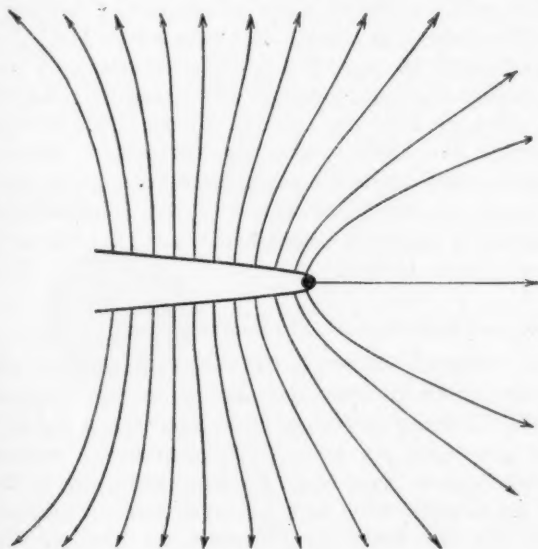


Fig. 13

selbst auch entsprechende entgegengesetzt gerichtete Kräfte erleiden. Nimmt man nun auf der oberen Seite der Kugelbahn einen Teil der in Bewegung zu setzenden Wassermassen fort, so werden hier die gegenseitigen Kraftwirkungen geringer als auf der unteren Seite, d. h. die Kugel wird zu der freien Oberfläche hingetrieben. Die Verringerung der radialen Widerstandskräfte an der freien Grenze erkennt man aus der Aufnahme 9, Taf. XVI der Ann. I an der erheblichen Erweiterung

1) Die an der Kugel ansetzende Stromlinie ist im Vergleich zu den übrigen Stromlinien als Zwischenlinie gezeichnet.

des ganzen Hohlraummantels nach der oberen Seite hin; außerdem zeigt die Krümmung des Einschußkegels deutlich das Hochsteigen der Kugel. Ganz analog kann man durch Vermehrung der Massen auf einer Seite der Schußbahn die dort wirkenden Kräfte und Gegenkräfte verstärken und so die Fortdrängung der Kugel durch die feste Wand verständlich machen.

Wir wollen versuchen, diese schematische Erklärung etwas weiter auszubilden, indem wir in einem ersten Abschnitt (5. 1.) die Kraftlinien im eigentlichen Sinne konstruieren und in einem zweiten Abschnitt (5. 2.) die Veränderung dieses Kraftlinienbildes durch die Nähe der Grenzen untersuchen. Wir müssen uns infolge des Fehlens einer mathematischen Theorie der Hohlraumerscheinungen mit allgemeinen Folgerungen begnügen und müssen uns dabei bewußt bleiben, daß Folgerungen dieser Art, wie schon in Ann. I betont wurde, nur zu leicht zu Trugschlüssen führen können.

1. Das Kraftlinienbild im unbegrenzten Medium

Die bisherige Erklärung ist insofern inkorrekt, als die Figur 13 nur die Richtung der augenblicklichen Bewegungen, nicht die Richtung der augenblicklichen Kräfte liefert. Wir müssen also noch ein neues Bild konstruieren, welches für einen bestimmten Augenblick die Kraftrichtungen im Wasser angibt, ein Kraftlinienbild im eigentlichen Sinne.¹⁾ Dieses Kraftfeld ist mit der Kugel so verbunden zu denken, wie das magnetische Kraftfeld mit dem Magnetpol. Sie trägt es bei ihrer Bewegung durch das Wasser mit sich von Ort zu Ort, oder richtiger gesagt, sie erzeugt es bei ihrer Bewegung unter Aussendung von Druckwellen ständig von neuem.

Wenn wir uns zunächst die Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse so gegeben denken, daß nach Ann. I, Abschnitt 4.1.

1) Eine gewisse Verwandtschaft besteht natürlich zwischen diesen beiden Bildern, Hr. Ahlborn betont in seinen schönen Strömungsversuchen diese Verwandtschaft aber zu stark, wenn er die absoluten Strömungslinien direkt als Kraftlinien bezeichnet. (Die Widerstandsverhältnisse im Wasser an Platten und Schiffskörpern. Jahrb. d. schiffbautechnischen Gesellschaft 20. S. 382. 1919).

kein Hohlraum entstehen kann, so ergibt sich dieses Bild unschwer aus der klassischen Hydrodynamik. Wir berechnen zu diesem Zwecke für jeden Punkt die relative Geschwindigkeit des Wassers gegen die Kugel, berechnen daraus nach der Ber-

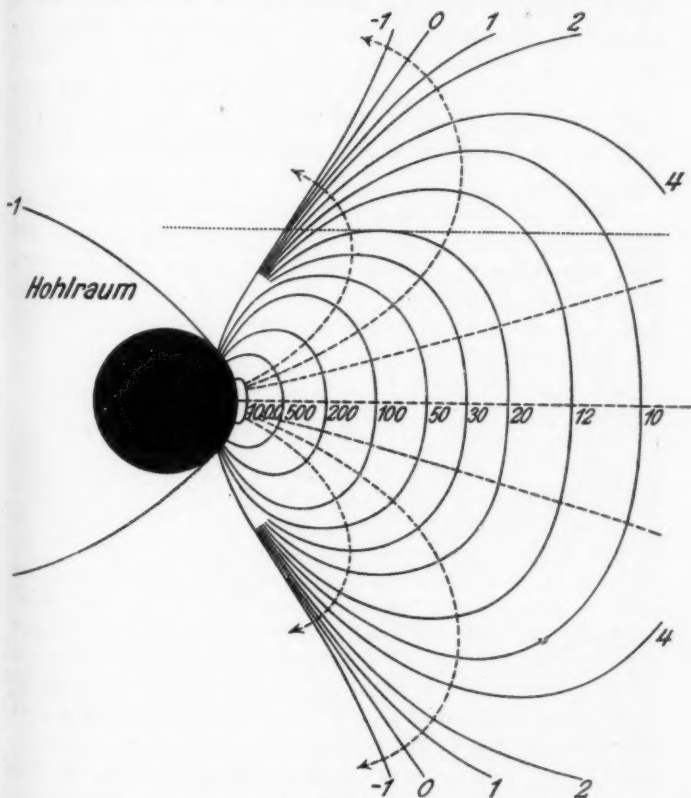


Fig. 14

nonullischen Gleichung den für jeden Punkt in diesem Moment geltenden Druck und legen so die Kurven gleichen Druckes in der Umgebung der Kugel fest (vgl. Fig. 14). Denken wir nun zu diesen Kurven die senkrecht auf ihnen stehenden Schnittlinien gezogen, wie es in einigen Fällen durchgeführt

ist, so erhalten wir das Kraftlinienbild im Wasser, das die Kugel bei ihrer Bewegung vor sich herträgt.¹⁾

Die Konstruktion ist nur für denjenigen Teil der Kugelfläche durchgeführt, welcher auch bei Hohlraumbildung (vgl. Ann. I, Abschnitt 4. 1.) mit dem Wasser in Berührung bleiben würde. Als Kugelgeschwindigkeit v_n ist 500 m/sec gewählt, der Druck p_n in größerer Entfernung von der Kugel muß dann nach Ann. I der Bedingung $p_n \geq \frac{5}{8} \gamma v_n^2$ genügen, müßte also rund 1560 Atm. betragen. Die Ziffern der Fig. 14 geben in Atm. den an der betreffenden Stelle herrschenden Überdruck gegen p_n an.

Sinkt der Druck p_n bei der gegebenen Geschwindigkeit von 500 m/sec, wie es bei unseren Versuchen der Fall ist, auf rund eine Atm., so entsteht hinter der Kugel ein Hohlraum, wie er nach Ansatzstelle und Begrenzung im Anschluß an Ann. I in der Fig. 14 eingetragen ist. Die Begrenzungslinie des Hohlraums ist eine Kurve gleichen Drucks und zwar entspricht sie einem Druck von der absoluten Größe 0. Dasselbe gilt jetzt auch von der äußersten Kurve „-1“ unserer Kraftlinienbildes, da jetzt $p_n - 1 \text{ Atm.} = 0$ wird. Diese beiden Kurven gleichen Drucks müssen zusammenfallen und zwar in der Art, daß die Kurve „-1“ bis zur Hohlraumgrenze rückt, da letztere durch die Größe von p_n und v_n nach Ann. I festgelegt ist. Die übrigen Kurven gleichen Drucks müssen in irgendeiner Weise nachrücken. Wie dies im einzelnen geschieht, muß dahingestellt bleiben, solange eine mathematische Theorie der Hohlraumerscheinungen fehlt, ich glaube aber annehmen zu dürfen, daß das Kraftlinienbild an der Vorderseite der Kugel seinen Grundcharakter hierbei behält. Dies folgere ich unter anderem daraus, daß die Widerstandskraft bei den Bauerschen Messungen (a. a. O.), d. h. bei ausgeprägter Hohlraumbildung, und die Widerstandskraft, welche sich aus der klassischen Hydrodynamik für denjenigen Teil der vorderen Kugelfläche berechnet, der auch bei der Hohlraumbildung mit dem Wasser in Berührung bleibt, nicht allzusehr voneinander abweichen. Für $v_n = 500 \text{ m/sec}$

1) Von einer etwaigen „Verzerrung“ des Feldes durch „überlagerte Druckdifferenzen, die von der Geschwindigkeits- und Richtungsänderung der Teilchen herrühren“, wollen wir hier absehen. Vgl. F. W. Lanchester, Aerodynamik Bd. I, §§ 60 und 113, Teubner 1909.

erhält man z. B. die Werte $360 \cdot 10^6$ bzw. $265 \cdot 10^6$ Dyn. Das Überwiegen der ersten Ziffer erklärt sich z. T. sicher daraus, daß die Ziffer ja für eine nicht ideale Flüssigkeit gefunden ist, z. T. wahrscheinlich daraus, daß die Kurven gleichen Drucks bei der Hohlraumbildung auseinanderweichen. Wir wollen also im folgenden das Bild der Fig. 14 auch für die Erklärung unserer Versuche zugrunde legen. Wir können uns mit dieser rohen Annäherung um so mehr begnügen, als die nachstehenden Ausführungen sowieso auf rein qualitativem Gebiet bleiben müssen.

2. Die Änderung des Kraftlinienbildes durch die Nähe der Grenzflächen

Unsere Frage lautet nun: wie ändert sich dieses Kraftfeld, wenn ein Teil des Mediums längs einer der Kugelrichtung parallelen Grenzebene, wie sie als gestrichelte Linie in Fig. 14 angedeutet ist, durch Luft bzw. durch einen starren Körper ersetzt wird?¹⁾ Die berechneten Kräfte werden hierbei eine Änderung in doppelter Beziehung erfahren, a) nach *Größe*, b) nach *Richtung*. Beide Änderungen bilden selbstverständlich in Wirklichkeit eine einzige Gesamterscheinung, jede Größenänderung ist mit einer Richtungsänderung, jede Richtungsänderung mit einer Größenänderung untrennbar verbunden. Wenn wir diese Änderungen trotzdem im folgenden trennen, so geschieht dies nur, um den logischen Gedankengang klarer hervortreten zu lassen.

Zu a) Wir wollen uns den Ersatz des Wassers durch Luft zunächst als *plötzlich* eingetreten denken. Alle Wasserteilchen an der Oberfläche werden dann von ihrem bisherigen Druck entlastet, entlasten dadurch die nächst tieferen Schichten usw., d. h. es pflanzt sich eine Verdünnungswelle zur Kugel hin fort. Infolgedessen überwiegt jetzt der Druck auf die untere Kugelhälfte und die Kugel steigt hoch. Ähnliches tritt auch ein, wenn die Kugel sich *dauernd* längs einer freien Grenz-

1) Bei Beantwortung dieser Frage müssen wir, wie hier noch einmal betont sein mag, im Auge behalten, daß die Äquatorialgegend und die Hinterkalotte der Kugel durch den Hohlraum jeder äußeren Einwirkung entzogen ist, wodurch z. B. die Wirkung der festen Wand auf die Kugel eine ganz andere wird, wie in der klassischen Hydrodynamik.

fläche hin bewegt. Die Kugel sendet bei ihrer Vorwärtsbewegung fortwährend Druckwellen aus, um in jedem Augenblick das ihr zukommende Kraftfeld in ihrer Umgebung wieder aufzubauen. Gelangen diese Druckwellen, die im unbegrenzten Medium ins Unendliche laufen würden, an die freie Oberfläche, so findet hier eine Entlastung statt, die als Verdünnungswelle zur Kugel zurückgelangt. Als Dauerzustand stellt sich so ein geringerer Druck auf der oberen Hälfte der Kugelvorderfläche ein, als auf der unteren Hälfte, d. h. die Kugel wird zu der freien Grenze hingedrängt.¹⁾

Nimmt man statt der freien Grenze eine feste Grenze, so wird statt der Verdünnungswelle eine Verdichtungswelle zur Kugel zurückgelangen, so daß sich als Dauerzustand ein höherer Druck auf der oberen Kugelseite der Fig. 14 herstellt, der die Kugel von der festen Grenze fortdrängt. Die Abstoßungskraft ist dann für gleiche Grenzentfernungen absolut genommen gleich der Anziehungskraft, wie es den Versuchsergebnissen entspricht.

Diese Erklärung verlangt, daß die Verdünnungs- und Verdichtungswellen bei ihrer „Reflexion“ längs der Kraftlinien zur Kugeloberfläche zurückwandern. Dies scheint mir tatsächlich daraus zu folgen, daß die Teilchen längs der ganzen Kraftlinie in einem besonderen vektoriellen Zusammenhang miteinander stehen, indem jedes Teilchen das nächste Teilchen in bestimmter Richtung beschleunigt, müßte aber noch bewiesen werden. Außerdem tritt noch eine besondere zeitliche Komplikation auf. Die Kugel macht ihrerseits während der Zeit, in welcher die Wellen von der Grenzfläche zu ihr zurückgelangen, einen merklichen Weg. Die hierdurch hervorgerufene Änderung des

1) Nach dieser Erklärung bzw. als unmittelbare Konsequenz unserer Versuche über die Wirkung einer parallelen freien Oberfläche müßte eine wesentliche Verringerung des Widerstandes zu beobachten sein, wenn sich die Kugel in *senkrechter* Richtung einer freien Oberfläche nähert. Diese Folgerung widerspricht nicht den Bauerschen Versuchen (Anm. 1, S. 724), wenn man die von ihm gefundene Extraänderung des Widerstandes ($e-1$; S. 240 der Bauerschen Arbeit) nicht nur als Eindringungswiderstand auffaßt, sondern als Differenz zwischen der Widerstandsvermehrung beim Eindringen und der Widerstandsverminderung beim Austritt. Experimentell ist diese Folgerung sehr schwer zu prüfen, da dies Geschwindigkeitsmessungen *innerhalb* des Wassers verlangen würde.

ganzen Vorgangs wird um so größer, je höher die Kugelgeschwindigkeit ist, und führt zu einer völligen Änderung der ganzen Erscheinung, wenn die Kugel die Schallgeschwindigkeit erreicht oder überschreitet.

Zu b) Bei der *freien* Grenzfläche sinkt nach Fig. 14 an derjenigen Stelle, wo die Überdruckkurve „20“ die punktiert gezeichnete freie Grenzfläche berührt, der Überdruck auf 0, alle Kurven gleichen Drucks müssen also nach unten rücken. Dadurch verschiebt sich der Druckmittelpunkt auf der Kugel und die Richtung des Gesamtwiderstandes senkt sich schräg nach vorn, d. h. der Gesamtwiderstand hat eine nach oben gerichtete Komponente im Sinne der Versuchsergebnisse erhalten.

Bei der *festen* Grenzfläche wächst der Druck an irgendeinem Aufpunkt nach einem bekannten Schema so, als ob außer der gegebenen Kugel noch eine zweite, ihrem Spiegelbild entsprechende Kugel sich durch das Wasser bewege. Abgesehen von sehr großer Nähe der Kugeln, wo man nicht mehr mit einfacher Superposition der Druckfelder arbeiten darf, müssen sich die Drucke summieren, unmittelbar an der Wand also verdoppeln. Alle Kurven gleichen Drucks rücken demgemäß in Fig. 14 nach oben, wenn die punktierte Linie der Fig. 14 jetzt als feste Grenze aufgefaßt wird. Dadurch verschiebt sich der Druckmittelpunkt auf der Kugel und die Richtung des Gesamtwiderstandes hebt sich schräg nach vorn, d. h. der Gesamtwiderstand hat eine senkrecht nach unten gerichtete Komponente im Sinne der Versuchsergebnisse erhalten.

Die Ursache, aus welcher die experimentell gefundene Gleichheit in der Wirkung der freien und der festen Grenze hervorgeht, erklärt sich hierbei vielleicht durch folgende Überlegung: ein Aufpunkt in der Nähe der Grenze habe ursprünglich den Druck 10 Atm.; bei freier Grenze sinkt dieser Druck auf eine Atm., bei fester Grenze steigt dieser Druck auf 20 Atm., der Unterschied gegen den ursprünglichen Zustand ist also in beiden Fällen praktisch der gleiche. —

Eine wirkliche Lösung der beiden von mir gefundenen hydrodynamischen Erscheinungen ist nur aus einer grundlegenden Behandlung des ganzen Fragenkomplexes zu erwarten. Ich hoffe aber doch, einige qualitative Gesichtspunkte zu ihrem Verständnis beigetragen zu haben. —

6. Einige Schießversuche an Bleiplatten

Zum Schlusse möchte ich noch auf Erscheinungen hinweisen, welche man beim Durchschießen von Bleiplatten erhält, und welche einen rohen, aber doch recht anschaulichen Beitrag zu unseren Fragen liefern (Fig. 15). Die Kugel schlägt in die hier als 3,1 mm dick gewählte Bleiplatte ein Loch von erheblich größerem Durchmesser $2R$, als sie selbst besitzt (14,6 mm¹⁾ gegenüber 11,0 mm), und spritzt das Blei in der experimentell

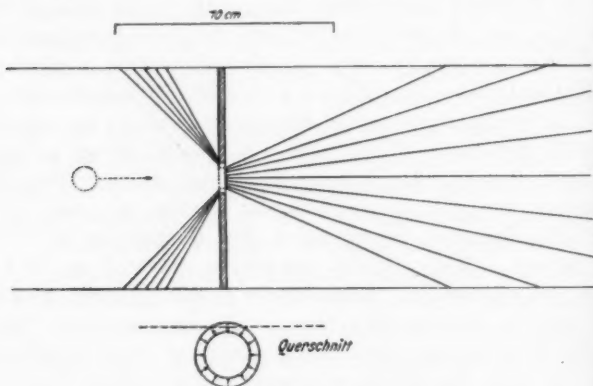


Fig. 15

festgestellten Art der Zeichnung als kleine Partikelchen schräg nach hinten und schräg nach vorn, wobei die nach hinten geschleuderten Mengen nach Wägungsversuchen angenähert dem Differenzring zwischen Lochquerschnitt und Kugelquerschnitt entsprechen. Die Kugel übt also auf das Blei rings um sich herum radial nach außen gerichtete Kraftkomponenten aus und muß selbst radial nach innen gerichtete Kraftkomponenten erleiden. Legt man nun die Schußlinie so nahe an die Bleigrenze, daß der Abstand zwischen Kugelmittelpunkt und freier Grenze kleiner als R wird, so tritt an

1) Vgl. auch Ric, S. 38 ff. Die Zahlenwerte fallen bei diesen Versuchen je nach der Härte des Bleis verschieden aus, das Ergebnis ist aber qualitativ stets das gleiche. Vielleicht spielt auch das verschiedene Material der Kugeln, früher Messing, jetzt Stahl, eine Rolle.

dieser Seite ein Ausfall an radial nach innen gerichteten Gegenkräften ein, d. h. die Kugel wird zur freien Grenze hingedrängt, wie dies aus der kleinen Nebenfigur unmittelbar folgt und auch durch Versuche leicht bestätigt werden konnte.

Zusammenfassung

1. Eine Kugel großer Geschwindigkeit, die unter flachem Winkel auf eine Wasseroberfläche geschossen wird, „prallt ab“. Die Bahnen der Kugel im Wasser werden als Funktion des Aufprallwinkels experimentell festgestellt. — Die Versuchsergebnisse scheinen, nach einem Vergleich mit artilleristischen Angaben, vom Durchmesser der Kugel zwischen 1,1 cm und 16 cm unabhängig zu sein.

2. Eine Kugel großer Geschwindigkeit, die im Wasser parallel einer *freien* Oberfläche hinfliegt, wird zu der Oberfläche hingedrängt. Die Bahnen der Kugel werden als Funktion des Abstandes zwischen Kugel und Grenzfläche, zum Teil unter Variation der Geschwindigkeit, experimentell festgestellt.

3. Eine Kugel großer Geschwindigkeit, die im Wasser parallel einer *festen* Grenzfläche hinfliegt, wird von dieser Grenzfläche abgedrängt. Die Größe der Abdrängung wird als Funktion des Abstandes zwischen Kugel und Grenzfläche experimentell festgestellt.

4. Die von der *freien* Grenzfläche ausgehende Kraft wird als Funktion der Geschwindigkeit und des Abstandes aus dem Versuchsmaterial berechnet. Die Kraft ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Die Kraft steigt zunächst mit wachsender „Einschußtiefe“, erreicht bei halbem Eintauchen der Kugel ein Maximum und sinkt mit weiter wachsender „Einschußtiefe“ erst schnell, dann langsam ab. — Die Bahn der Kugel im Wasser ist von der Größe der Geschwindigkeit unabhängig.

5. Die von der *festen* Grenzfläche ausgehende Kraft wird als Funktion der Geschwindigkeit und des Abstandes aus dem Versuchsmaterial berechnet. Die Kraft ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Die Kraft ist umgekehrt proportional zu $a - \rho$, wo a den Abstand des Kugelmittelpunktes von der Grenze und ρ den Radius der Kugel bedeutet.

6. Die Kräfte, welche von der freien und von der festen Grenzfläche ausgehen, sind nach den Versuchsergebnissen bei gleicher Lage der Kugel zur Grenzfläche absolut genommen einander gleich.

7. Es wird versucht, die erhaltenen Resultate wenigstens in ihren Grundzügen theoretisch zu verstehen. —

Zum Schlusse möchte ich auch hier Frl. cand. phys. M. Petter für ihre Hilfe bei den Auswertungen und Berechnungen, sowie Hrn. Dipl.-Ing. G. Käßner für seine Hilfe bei den hydrodynamischen Überlegungen meinen besten Dank aussprechen.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, im August 1927.

(Eingegangen 4. September 1927)

3. Röntgenographische und elektrische Untersuchung des Systems Palladium-Wasserstoff; von J. O. Linde und G. Borelius

(Hierzu Tafel XX)

1. Einleitung

Ordnet man die auf ihr Lösungsvermögen für Wasserstoff näher untersuchten Metalle nach dem Lösungsvermögen bei z. B. 1000° und Atmosphärendruck, bekommt man, wie besonders durch die Messungen von Sieverts¹⁾ und seinen Mitarbeitern bekannt ist, die Reihe Pt Cu Fe Ni Pd Vd Ta Ti Zr Th Ce. Die Temperatur und Druckabhängigkeit ist eine solche, daß diese Reihenfolge auch bei anderen Temperaturen und Drucken im wesentlichen beibehalten wird. Mit abnehmender Temperatur nimmt die Löslichkeit im Beginn der Reihe bei Pt stark ab. Wenn man in der Reihe fortschreitet, wird diese Abnahme immer kleiner und von Pd an hat man eine Zunahme der Löslichkeit mit abnehmender Temperatur.²⁾ Bei den meisten dieser Metalle kennt man Hydride oder jedenfalls Phasen mit einer Zahl von Wasserstoffatomen von derselben Größenordnung wie die der Metallatome. Erst von Pd an hat man den Übergang von gewöhnlichen Lösungen in Hydriden durch Drucksteigerung oder Temperatursenkung experimentell hervorrufen und verfolgen können. Bei Pd geschieht dieser Übergang in experimentell besonders leicht zugänglichen Druck- und Temperaturgebieten. Das System Palladium-Wasserstoff ist deshalb gut geeignet als Beispiel für das Studium solcher Übergänge. Es ist auch der Gegenstand einer großen Zahl von Untersuchungen gewesen. Wir kennen etwa 80 Untersuchungen der Löslichkeit oder der physikalischen Eigenschaften des Systems. Für die Zeit 1834—1900 hat

1) A. Sieverts u. a., Zahlreiche Arbeiten aus den Jahren 1907 bis 1915 und nach 1925.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 83. S. 121. 1927.

Bose¹⁾ und für die Zeit 1900—1921 McKeehan²⁾ ausführliche Literaturübersichten gegeben. Eine umfassende Zusammenstellung von Versuchsergebnissen findet man weiter in Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie.³⁾

Unsere Untersuchung steht in nahem Zusammenhange mit anderen Untersuchungen im hiesigen Institute teils über Wasserstoff in Metallen, teils über die Atomverteilung in Mischkristallen. Sie wurde schon im Jahre 1925 begonnen und gewisse Teile der experimentellen Untersuchung waren schon abgeschlossen, als die im folgenden oft zitierten neuen Arbeiten von Lambert und Gates, Gillespie und Hall u. a. uns bekannt wurden. Wir haben somit leider die von diesen Autoren gewonnenen Erfahrungen nicht bei der Planierung unserer Versuche voll ausnützen können.

2. Diskussion früherer Resultate betreffend die Aufnahme von Wasserstoff aus der Gasphase

Ehe wir auf die eigenen Messungen eingehen, wollen wir eine kritische Übersicht der Resultate früherer Untersuchungen geben. Die kritischen Gesichtspunkte sind dabei teilweise durch die eigenen Untersuchungen gewonnen.

Die von vielen Forschern gesammelten allgemeinen Erfahrungen über den Zusammenhang bei konstanter Temperatur zwischen Wasserstoffkonzentration c im Palladium und äußerem Wasserstoffdruck p können mit Hilfe der Fig. 1 dargestellt werden.

Bei sehr kleinen Konzentrationen unter etwa 0,01 Atome H auf ein Atom Pd gilt, wie Hoitsema⁴⁾ und später ausführlicher Sieverts⁵⁾ gezeigt haben, jedenfalls bei hohen Temperaturen die Formel

$$c = \text{Konstant} \cdot p^{1/2}.$$

Bei etwas höheren Konzentrationen treten Abweichungen von dieser Formel hervor, die, wie Sieverts findet, durch Hinzu-

1) E. Bose, Ztschr. f. phys. Chem. 34. S. 701. 1900.

2) L. W. McKeehan, Phys. Rev. 21. S. 334. 1923.

3) Gmelins Handb. d. anorg. Chem. 8. Aufl. Systemnummer 2. 1927.

4) C. Hoitsema, Ztschr. f. physik. Chem. 17. S. 25. 1895.

5) A. Sieverts, Ztschr. f. physik. Chem. 88. S. 451. 1914.

fügung eines Gliedes $\text{Konstant} \cdot p$ angenähert berücksichtigt werden können.

Bei noch größeren Konzentrationen wird die Form der Isotherme im p - c -Diagramme von der Weise abhängig, in der der mehr oder weniger stabile Gleichgewichtszustand erreicht wird.

Troost und Hautefeuille¹⁾ und nach ihnen Roozeboom und Hoitsema²⁾, Holt, Edgar und Firth³⁾, Lambert und Gates⁴⁾, Gillespie und Hall⁵⁾ finden in den meisten Fällen einen gut ausgebildeten horizontalen Teil. Diese Kurven lassen sich in den einfachsten Fällen so erklären, daß sich

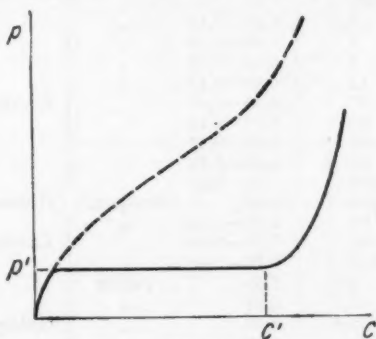


Fig. 1

eine neue wasserstoffreiche Phase ausbildet mit einem Gleichgewichtsdruck gleich dem Druckwert p' am horizontalen Kurventeil und einer Konzentration gleich dem Konzentrationswert c' am rechten Ende dieses Kurventeils. Dem horizontalen Kurventeil entspricht das zweiphasige Zustandsgebiet.

Die verschiedenen Autoren, die fast alle verschiedene Methoden, um die Gleichgewichtszustände zu erreichen, benutzt

1) L. Troost u. P. Hautefeuille, *Compt. rend.* 78. S. 686. 1874; *Chim. Phys.* 2. S. 273. 1874.

2) G. Hoitsema, a. a. O.

3) A. Holt, C. E. Edgar u. J. B. Firth, *Ztschr. f. phys. Chem.* 82. S. 513. 1913.

4) B. Lambert u. S. F. Gates, *Proc. Roy. Soc. A.* 106. S. 456. 1925.

5) L. J. Gillespie u. F. P. Hall, *Journ. Amer. Chem. Soc.* 48. S. 1207. 1926.

haben, finden indessen Werte für p' und c' , die zum Teil sehr weit voneinander abweichen. Man ersieht dies aus den Zusammenstellungen in der Tab. 1 und in dem $\log p' - \frac{1}{T}$ -Diagramme der Fig. 2 (ein Diagramm, in dem, wie bekannt, Sättigungsdrucke oft angenähert gerade Kurven geben).

Tabelle 1

Temp. in °C	p' mm Hg	c' H/Pd		
100	229	0,51	kompakt	Troost u. Hautefeuille
100	225	0,57	Pulver	
160	1488	—	"	
0	5	0,42—0,45	"	
10	6	0,42—0,45	"	Roozeboom
20	7	0,40—0,45	"	
40	15	0,40—0,42	"	
50	26	0,39—0,48	"	
60	40	0,39—0,42	"	
70	62	0,39—0,46	"	
80	92	0,39—0,41	"	
100	202	0,36—0,41	"	
100	285	> 0,49	kompakt	Hoitsema
75	68	0,50—0,54	"	Lambert u. Gates
103	185	0,49—0,54	"	
120	315	0,46—0,52	"	
0	3,95	0,59	Pulver	Gillespie und Hall
30	18,7	0,54	"	
80	152,6	0,50	"	
160	1326	0,50	"	
180	1961	0,50	"	Holt, Edgar u. Firth
18	8	—	"	

Betreffend die c' -Werte, die in der Tab. 1 um $c' = 0,5$ H/Pd zerstreut liegen, ist die Möglichkeit vorhanden, daß sie in vielen Fällen gefälscht worden sind durch das Hinzukommen einer noch wasserstoffreicheren und sehr stabilen Phase mit etwa $c = 0,7$, deren Existenz im folgenden aufgewiesen werden soll. Ist diese Phase schon von vornherein in dem Pd vorhanden, nimmt es bei der Beladung zu wenig Wasserstoff auf, die c' -Werte fallen zu klein aus. Diese Möglichkeit ist bei Roozeboom und Hoitsema nicht ausgeschlossen. Wird sie dagegen während des Versuches neben der Phase mit etwa $c' = 0,5$ gebildet, kommt c' zu groß aus.

Erst durch die Messungen von Gillespie und Hall, bei denen zwischen 80° und 180° c' genau gleich 0,50 H/Pd ge-

gefunden wurde, ist bewiesen worden, daß unter geeigneten Umständen die Phase Pd_2H auftreten kann. Die Existenz dieses Hydrids wurde früher von Troost und Hautefeuille behauptet, aber von mehreren späteren Autoren verneint. Die in der Fig. 2 ausgezogene Kurve, die durch die Werte von Gillespie

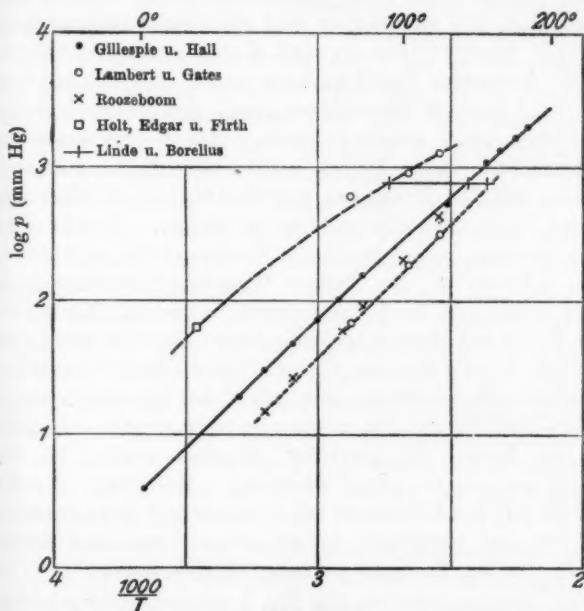


Fig. 2

und Hall gelegt worden ist, und in dem höheren Temperaturgebiete durch

$$\log p' = 7,23 - 1780 \cdot \frac{1}{T}$$

(p' in mm Hg, T absolute Temperatur) satisfiert wird, ist somit jedenfalls zwischen 80° und 180° die Druckkurve für Pd_2H . Diese Kurve läßt sich ohne Schwierigkeit auch durch die Punkte bei niedrigen Temperaturen fortsetzen, wo größere c -Werte erhalten wurden (bei 30° 0,54, bei 0° 0,59). Es ist deshalb möglich, daß der Druck auch hier von dem Pd_2H be-

stimmt wurde, und daß die großen c' -Werte in der oben angegebenen Weise vorgetäuscht sind. Es kann aber auch möglich sein, daß die Anordnung des Pd_2H mit abnehmender Temperatur nur bei etwas größeren Konzentrationen als $c = 0,50$ existieren kann.

Die Fig. 2 zeigt aber weiter, daß oft p' -Werte erhalten worden sind, die viel kleiner sind als diese Sättigungsdrucke des Pd_2H gemäß Gillespie und Hall. Besonders lehrreich sind die Messungen von Lambert und Gates bei 103° , aus denen man deutlich herauslesen kann, daß sie zwei horizontale Kurvenstücke erhalten haben. Das p' des einen (von Lambert und Gates freilich nicht ausgezogenen) stimmt gut mit dem aus den Messungen von Gillespie und Hall interpolierten Wert, das der anderen ist kleiner. Lambert und Gates brachten immer zuerst die Wasserstoffkonzentration auf etwa $c = 0,6 \text{ H/Pd}$. Bei stetiger Wasserstoffentnahme fanden sie die untere von ihnen ausgezogene horizontale Kurve. Von einem Punkt auf diese ausgehend, fanden sie dann bei Wasserstoffzufuhr die Punkte der oberen. Die p' -Werte der unteren horizontalen Kurvenstücke sind nach den Messungen bei 75° , 103° und 120° in die Fig. 2 eingezeichnet worden, sie liegen auf einer Kurve, die punktiert eingelegt worden ist. Die c' -Werte sind nicht scharf bestimmt. Der Wert $c' = 0,50$ ist jedoch mit den Messungen bei 103° und 120° gut verträglich. Wenn es sich bestätigen würde, müßten zwei verschiedene Hydride von der Zusammensetzung Pd_2H bestehen.

Die ungebrochene, in der Fig. 1 gestrichelte Fortsetzung des ersten steigenden Kurventeils scheint verhältnismäßig instabilen Zuständen zu entsprechen. Die Verwirklichung dieser Zustände, und zwar bis zu etwa $c = 0,6 \text{ H/Pd}$, gelang zuerst Holt, Edgar und Firth bei 16° , und später Lambert und Gates bei 75° , 103° und 120° durch stetige Steigerung des Druckes. Die sich aus diesen Messungen für $c = 0,50$ ergebenden höchsten Druckwerte sind zum Vergleich mit den früher besprochenen in die Fig. 2 eingezeichnet und durch eine gestrichelte Kurve verbunden worden. Auch Gillespie und Hall haben bei 0° ausnahmsweise zweimal die Fortsetzung der ersten steigenden Kurve erhalten.

3. Abhängigkeit der Gitterkonstante von Gasdruck und Temperatur

Röntgenographische Untersuchungen über die Änderung der Gitterkonstante des Palladiums bei Wasserstoffaufnahme sind, soweit uns bekannt ist, schon von fünf Autoren veröffentlicht worden. Die meisten Aufnahmen gelten jedoch elektrolytisch beladenem Pd und werden erst in Abschnitt 5 erwähnt. Nur eine Aufnahme von McKeehan¹⁾ gilt in Wasserstoffgas unter gewöhnlichen Umständen beladenem Pd. Er findet eine Änderung der Gitterkonstante von 3,90 bei reinem Pd zu 4,038 bei beladenem Pd. Er schreibt (wie wir sehen werden, mit Unrecht) dem Pd₂H die Gitterkonstante 4,036 zu. Die Wasserstoffaufnahme geschah bei Zimmertemperatur und bei 1 Atm. Druck. Neulich fanden Bredig und Allolio²⁾ für reines Pd $a = 3,877$ und für durch Kathodenzerstäubung in Wasserstoff hergestelltes Pd $a = 3,991$.

Da die bei höheren Temperaturen in Wasserstoffgas von verschiedenen Drucken erreichten Zustände sich im allgemeinen nicht durch Abschrecken auf Zimmertemperatur konservieren lassen, wird es, um die Gitterkonstante als Funktion von Druck und Temperatur kennenzulernen, notwendig, die Röntgenaufnahmen bei den gewünschten Temperaturen und Drucken auszuführen. Zu diesem Zweck ist die in der Fig. 3 gezeigte Debyekamera ausgeführt worden.

Der Probestab war aus dünnem Palladiumblech gerollt, und hatte 1,5 mm Durchmesser. Er war in einem Quarzrohr befestigt und in der Mitte von einer in Magnesia-Wasserglasmasse eingebauten Heizspirale umgeben. Seine Temperatur wurde in der Nähe des von den Röntgenstrahlen getroffenen Teils mit einem Thermoelement gemessen. Der Stab war von außen drehbar. Der Konus wurde mit Fett, der Deckelrand mit Gummipackung gedichtet und die Kamera hielt bei Überdrucken bis über 4 Atm. hinreichend dicht. Der Durchmesser des Filmzylinders war 5 cm.

Bei Überdrucken wurde das Gas einfach einer Bombe mit Druckregulator entnommen. Bei Drucken unter einer Atmo-

1) L. W. McKeehan, a. a. O.

2) G. Bredig u. R. Allolio, Ztschr. phys. Chem. 126. S. 542. 1927.

sphäre wurde das einem Kippapparat durch eine Kapillarröhre entnommene Gas mit Hilfe eines auf verschiedene Drücke einstellbaren Quecksilberschlusses und einer Vakuumpumpe auf gewünschten Druck eingeregelt.

Die Röntgenröhre war eine Siegbahnsche. Meist wurde Eisenstrahlung, ausnahmsweise Kupferstrahlung, benutzt. Die oft recht schwache Reflexion des wasserstoffbeladenen Palla-

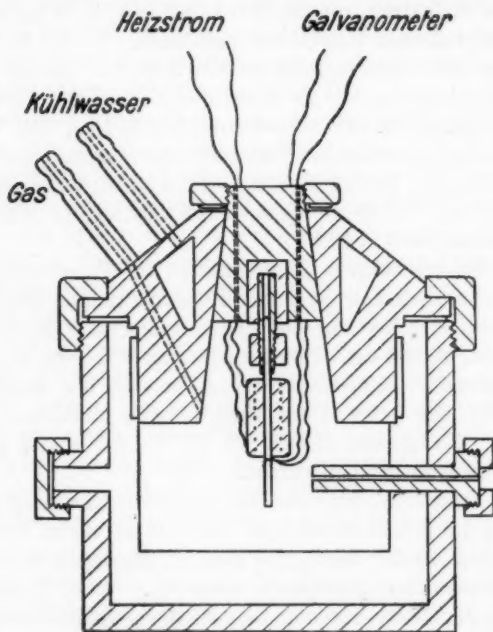


Fig. 8

diums zusammen mit der ziemlich kleinen Leistung der Hochspannungsanlage, machte Expositionszeiten von 5—8 Stunden nötig.

Bei Aufnahme bei höheren Temperaturen konnte nicht vermieden werden, daß sich auch der Film erwärmte. Für die hierdurch bedingte kleine Längenänderung des Films und Verzerrung des Röntgenbildes wurden empirische Korrekturen angebracht, die durch Aufnahmen am reinen Palladium in

Luftatmosphäre bei verschiedenen Temperaturen gemacht wurden. Für reines Palladium wurde dabei die Gitterkonstante

$$a = 3,888 + 4,6 \cdot 10^{-5}(t - 20) \text{ \AA}$$

benutzt (vgl. Abschn. 4). Die aus den Diagrammen berechneten Gitterkonstanten dürften wegen der Unsicherheit der nötigen Korrekturen auf etwa 0,01 Å unsicher sein.

Die meisten Aufnahmen wurden bei 100, 150 oder 200° und bei Wasserstoffdrucken zwischen 0,17 und 4 Atm. ausgeführt. Sämtliche bei diesen Temperaturen ausgeführten und photographisch guten Aufnahmen sind aus der Tab. 2 und der Fig. 4 zu ersehen. Die Buchstaben A, B und C geben verschiedene Methoden zur Einstellung von Druck und Temperatur an. In allen Fällen wurde das Probestück zuerst eine Viertelstunde bei etwa 250° C in der Luft erhitzt. Es zeigte sich aus besonderen Röntgenaufnahmen, daß dies genügte, um es frei von Wasserstoff zu erhalten. A bedeutet, daß dann der Wasserstoffpartialdruck bei der Versuchstemperatur von Null auf seinen Endwert gesteigert wurde, B daß der Druck bei 200° eingestellt und dann die Temperatur gesenkt wurde, C daß bei 200° mit 4 Atm. begonnen wurde, und dann zuerst die Temperatur, später der Druck zu den Endwerten gesenkt wurde. Die Einstellungszeiten für Druck oder Temperatur waren etwa eine Viertelstunde. In vielen Fällen dürfte jedoch nicht die Art der Einstellung sondern die späteren kleinen Schwankungen von Druck und Temperatur den Gleichgewichtszustand bestimmt haben.

In Übereinstimmung mit anderen Autoren fanden wir das flächenzentrierte Gitter des Palladiums bei Wasserstoffaufnahme nie merklich geändert, sondern nur erweitert.

Die Tabelle zeigt, wie nach dem im vorigen Abschnitt Ausgeführten wohl zu erwarten war, daß mindestens zwei verschiedene Phasen auftreten, eine wasserstoffärmere mit der Gitterkonstante a_1 zwischen 3,89 (reines Pd) und 3,92, und eine wasserstoffreichere mit einer Gitterkonstante a_2 von mindestens etwa 3,97. Der Übergang von der einen zur anderen Phase liegt auch bei den Drucken, die von Gillespie und Hall (die ausgezogenen Horizontalen in der Fig. 4) oder von Lambert und Gates gefunden wurden. Daß die wasser-

stoffärmere Phase diese Drucke überschreiten kann, steht auch in Übereinstimmung mit den früheren Erfahrungen.

Tabelle 2

Gitterkonstanten in Wasserstoffgas. Debyeaufnahmen

Temp.	Druck Atmosph.		Nr.	a_1	a_2
100°	0	—	60	3,894	
	0,36	B	42	3,904	
	0,53	B	44	3,920	
	1,0	A	10	3,917	
	0,36	C	49	3,904	3,980
	0,17	C	51		3,976
	0,36	C	50		3,971
	1,25	A	19		3,987
	1,75	A	18		3,993
	2,5	A	17		3,991
	4,0	A	15		3,988
	4,0	B	47		4,015
	4,0	A	48		3,999
150°	0	—	54	3,896	
	0,30	B	46	3,910	
	1,0	A	38	3,905	
	1,0	B	57	3,910	
	1,0	A	64	3,916	
	1,0	B	35	3,916	3,993
	1,0	B	36	3,918	3,984
	1,75	B	52	3,914	3,969
	1,75	A	64		3,971
	1,75	A	65		3,972
	2,5	B	58		3,974
	4,0	B	33		3,980
	4,0	B	55		4,002
	4,0	A	63		4,000
200°	0	—	62	3,898	
	0,29	A	45	3,910	
	1,0	A	6	3,905	
	1,0	A	31	3,911	
	2,5	A	32	3,911	
	2,5	A	25	3,915	
	4,0	A	56	3,916	
	4,0	A	34		3,976

Die Streuung der Gitterkonstanten der wasserstoffreicheren Phasen ist, besonders bei 150°, so bedeutend, daß es fraglich wird, ob wir nicht die beiden Arten von Pd_2H realisiert gehabt haben, und ob nicht diese beiden Arten verschiedene Gitterkonstanten besitzen, wie wir in der Figur für 150° durch

punktierte Kurven angedeutet haben. Indessen wagen wir nicht aus unseren Messungen mit Bestimmtheit einen derartigen Schluß zu ziehen und geben für das Pd_2H bis auf weiteres die mittlere Gitterkonstante 3,978 an.

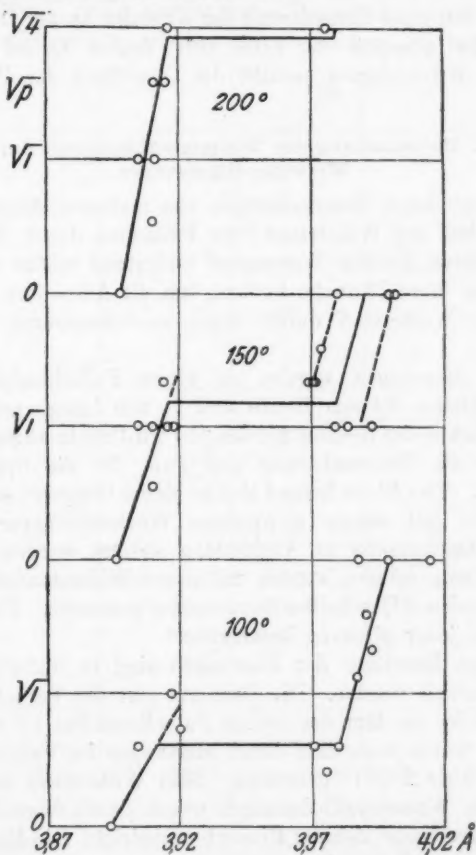


Fig. 4

Wenn auch die wasserstoffbeladenen Proben immer dieselben Linien im Röntgenbilde geben wie das reine Palladium, werden doch im allgemeinen die Intensitätsverhältnisse ge-

ändert. So zeigt z. B. die Fig. 5, Taf. XX ganz andere Verhältnisse der Intensitäten der Linien (113), (222) und (004) als die theoretisch gegebenen 818:250:142. Wahrscheinlich beruht doch dies nicht auf einer Änderung der Gitterstruktur, sondern auf einer Orientierung der Kristalle an der Oberfläche. Die große Intensität der Linie (004) deutet darauf hin, daß sich die Würfebenen parallel der Oberfläche der Probe einordnen.

4. Untersuchung der Wasserstofflöslichkeit durch Widerstandsmessungen

Es ist durch Untersuchungen von mehreren Autoren¹⁾ bekannt, daß der Widerstand von Palladium durch Aufnahme von größeren Mengen Wasserstoff bedeutend erhöht wird und wir haben diese Tatsache benutzt, um die Aufnahme und Abgabe von Wasserstoff durch Widerstandsmessungen zu verfolgen.

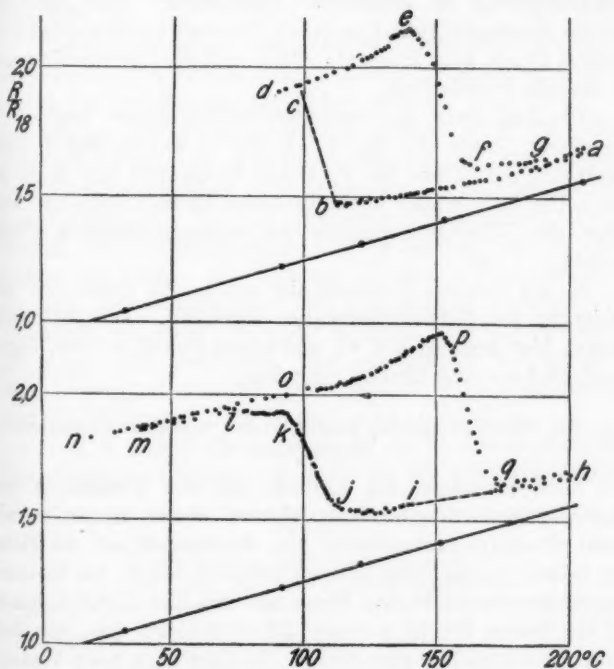
Die Messungen wurden an einem Palladiumblech von 0,1 mm Dicke, 0,4 mm Breite und 20 mm Länge ausgeführt. An den Ecken des Bleches wurden vier Pd-Drähte angeschweißt, zwei für die Stromzuleitung und zwei für die Spannungsabnahme. Das Blech befand sich in einem Glasrohr, das durch Hahnrohre mit einem Kippschen Wasserstoffapparat oder einer Vakuumpumpe in Verbindung gesetzt werden konnte. Höhere Temperaturen wurden mit einem Widerstandsofen hergestellt und mit Quecksilberthermometer gemessen. Der Strom wurde bei jeder Messung kommutiert.

Einige Resultate der Messungen sind in der Fig. 6 zusammengestellt worden. Die Ordinate gibt das Verhältnis des Widerstandes zu dem des reinen Palladiums bei 18° C. Das reine Pd wurde mehrmals durch Messungen im Vakuum nach Erhitzen über 200° C gemessen. Sein Widerstand war nach den ersten Wasserstoffbeladungen wegen damit folgender Verkürzung um einige Zehntel Prozent erniedrigt. Die Messungen sind in der zeitlichen Reihenfolge *a—b—c* . . . ausgeführt und die Geschwindigkeit der Temperaturänderung wird durch die Zahl der Stunden zwischen den Zuständen *a*, *b*, *c* usw. an-

1) Literaturübersicht der Widerstandsmessungen; Gmelins Handbuch, S. 289.

gegeben. In den beiden angeführten Versuchsreihen war der Wasserstoffdruck die ganze Zeit 1 Atm.

Die Messungen geben die neue und interessante Erfahrung, daß in Zusammenhang mit der Ausbildung der wasserstoffreichen Phase, eine ausgeprägte Temperaturhysteresis, der Wasserstoffaustausch zwischen Metall und Gas bei konstantem



a-2-b-7,5-c-0,1-d-1,5-e-0,5-f-0,5-g.

h-0,8-i-2-j-1,8-k-1,8-l-6-m-8-n-2,5-o-1-p-1-q.

Fig. 6

Druck auftritt. Die Resultate werfen neues Licht auf die in Abschnitt 2 besprochenen Erfahrungen aus den Löslichkeitsmessungen anderer Autoren, mit denen sie sich quantitativ in Übereinstimmung bringen lassen. Wir zeigen dies, indem wir in die Fig. 2 die Temperaturen angeben, bei denen die Phasen mit c gleich (oder jedenfalls nahe gleich) 0,50 H/Pd nach den

Messungen in Fig. 6 fertiggebildet sind bzw. sich aufzulösen beginnen.

Die Ausbildung der Phase ist bei etwa 93° C vollendet, was einen Punkt nahe der oberen gestrichelten Kurve der Fig. 2 ergibt. Dieser Kurve entsprach die Erreichung der Konzentration $c = 0,50$ bei stetiger Wasserstoffaufnahme durch Drucksteigerung bei konstanter Temperatur. Hier geschieht nun die Wasserstoffaufnahme durch Temperatursenkung bei konstantem Druck, aber immerhin stetig, und die Übereinstimmung ist deshalb verständlich.

Die Auflösung der wasserstoffreichen Phase beginnt in der oberen Kurve der Fig. 6 bei 139° C, was in Fig. 2 einen Punkt auf der Kurve des Pd_2H von Gillespie und Hall ergibt. Die Temperatur wurde in dieser Versuchsreihe nie weit unter die Bildungstemperatur der wasserstoffreichen Phase gesenkt.

In der zweiten Versuchsreihe wurde die Probe vor der Erhitzung auf Zimmertemperatur abgekühlt. Die Auflösung beginnt hier erst bei 151° C, was einem Punkt auf der Kurve von Lambert und Gates entspricht.

5. Die Gitterkonstanten elektrolytisch wasserstoffbeladenes Palladiums

Wird Palladium als Kathode bei der Elektrolyse von beispielsweise verdünnter Schwefelsäure benutzt, nimmt es, wie zuerst Graham nachgewiesen hat, Wasserstoff auf. Es bildet sich dabei, wie mehrere Autoren gefunden haben, bei Zimmertemperatur sehr leicht eine Phase mit etwa 850—1000 Volum H auf ein Volum Pd (d. h. etwa 0,7—0,8 H/Pd) aus, die sich durch große Stabilität auszeichnet. Es kann auch mehr Wasserstoff aufgenommen werden, der Überschuß wird aber verhältnismäßig leicht abgegeben.

Einige Röntgenaufnahmen von McKeehan¹⁾, Yamada²⁾ und Krüger und Sacklowski³⁾ haben schon gezeigt, daß auch die elektrolytische Wasserstoffaufnahme eine einfache Ver-

1) L. W. McKeehan, Phys. Rev. 21. S. 334. 1923.

2) M. Yamada, Phil. Mag. 45. S. 241. 1923.

3) F. Krüger und Sacklowski, Ann. d. Phys. 78. S. 72 1925 (PdAu- und PdAg-Legierungen).

größerung der Gitterkonstante des Palladiums hervorruft. Die maximale lineare Erweiterung des Gitters bestimmte Mc Keehan zu 3,6 Proz. (von 3,90 auf 4,039 Å) und Yamada zu 2,8 Proz. Krüger und Sacklowski geben für das wasserstoffbeladene Pd 4,00 Å an (aus ihrer Angabe, daß die Gitterkonstante dieser Phase mit der der AgPd-Legierung mit 30 Proz. Pd gleich sein sollte, berechnen wir jedoch nach dem Gesetz von Vegard etwa 4,03 Å).

Unsere Messungen wurden an etwa 0,1 mm dicken Pd-Bleichen ausgeführt. Sie wurden in 0,2-normaler Schwefelsäure elektrolysiert, teils bei Zimmertemperatur, teils bei etwa 90° C. Die Bestimmung der Gitterkonstanten geschah nach der Fokussierungsmethode von Bohlin-Seemann mit zwei Kameras nach einer Konstruktion von Phragmen. Im allgemeinen wurde eine Kamera mit 4,21 cm Diameter (Winkelgebiet 43–74°) benutzt, mehr ausnahmsweise, zur Feststellung sehr schwacher Linien, die zweite mit 9,95 cm Diameter (Winkelgebiet 25° bis 60°). Die Röntgenröhre war eine größere Siegbahnsche. Sie wurde mit einer neuen 10 Kilowatt-Hochspannungsanlage der Hochschule getrieben. Die Antikathode war meist aus Eisen. Die Aufnahmezeit war etwa 30 Min. Die Unsicherheit der Gitterkonstanten betrug etwa $\pm 0,002$ Å.

Tab. 3 enthält die Resultate für die bei Zimmertemperatur elektrolysierten Proben, Tab. 4 für die bei 90° elektrolysierten.

Tabelle 3

Gitterkonstanten nach Elektrolyse bei 18° C
Aufnahme nach der Fokussierungsmethode

Probestück	Fokuss.- Aufnahme	Amp./cm ²	Stunden	a_1	a_2
1	1	—	—	3,890	—
2	4	0,00002	170	3,891	—
2	9	0,0001	60	3,895	—
2	7	0,0005	50	3,900	4,034
3	8	0,0005	168	3,893	4,035
2	16	0,0007	16	—	4,041
1	5	0,006	20	3,898	4,032
1	6	+0,006	45	—	4,059
1	11	+0,006	72	—	4,065
1	11b	+0,013	72	—	4,065

Mittelwert für die zweiphasigen Aufnahmen

3,894 4,034

Die Tabellen enthalten außer den Gitterkonstanten die Stromdichten und Elektrolysierungszeiten. Ein + vor der Stromdichte bedeutet, daß die Probe zwischen den Elektrolysierungen nicht besonders behandelt worden ist. Sonst ist der Wasserstoff vor jeder neuen Elektrolyse durch Erhitzung der Probe über 600° C entfernt worden.

Tabelle 4

Gitterkonstanten nach Elektrolyse bei 90° C
Aufnahmen nach der Fokussierungsmethode

Probestück	Fokuss.- Aufnahme	Amp./cm ²	Stunden	a_1	a_2
3	19	—	—	3,888	—
7	34	0,00010	18	3,893	—
7	24	0,00010	20	3,890	—
7	36	0,00010	38	3,893	—
7	36 c	0,00014	6	3,894	—
7	25	0,00013	35	3,887	4,024
7	28	+0,00015	7	3,899	—
7	37	0,00017	29	3,890	—
7	39	+0,00020	5	3,891	4,024
6	36	0,01	3,5	3,885	4,020
6	23	0,00018	15	3,888	4,020
6	26	+0,0003	20	3,890	4,024
6	29	+0,001	4,5	3,888	4,024
6	33	+0,01	0,75	—	4,034
6	35	+0,1	0,33	—	4,059
6	35 b	—	48 ¹⁾	—	4,059
4	20	0,15	0,5	—	4,071
Mittelwert für die zweiphasigen Aufnahmen				3,888	4,023

Wir bemerken erstens, daß die höheren Wasserstoffkonzentrationen sich auch bei der elektrolytischen Beladung über einen zweiphasigen Zwischenzustand ausbilden. Die Behauptung Yamadas, die Konzentrationszunahme wäre stetig, ist wohl sicher falsch.

Die Mittelwerte der Gitterkonstanten der zweiphasigen Aufnahmen geben mit Hilfe des im nächsten Abschnitt bestimmten Zusammenhangs zwischen Gitterkonstante und Wasserstoffkonzentration die folgende Zahl der H-Atome auf ein Atom Pd in den koexistierenden Phasen

bei 20° $c_1 = 0,03$ $c_2 = 0,70$

bei 90° ($c_1 = 0,00$) $c_2 = 0,65$.

1) Keine neue Elektrolyse.

Die Resultate bei 20° C stimmen recht gut mit den Resultaten von früheren Untersuchungen der elektrolytischen Beladung bei Zimmertemperatur. So liegen z. B. die entsprechenden Knickpunkte in dem Widerstandskonzentrationsdiagramme von Fischer (Abschnitt 9) bei $c_1 = 0,03$ und $c_2 = 0,77$. Dagegen unterscheiden sich die bei Elektrolyse koexistierenden Phasen recht stark von denen bei der Gasaufnahme. So interpolieren wir z. B. aus den Messungen von Gillespie und Hall für 20° $c_1 = 0,03$ und $c_2 = 0,55$.

Bei 90° C scheint keine elektrolytische Beladung früher ausgeführt zu sein und wir haben somit kein Vergleichsmaterial dieser Art. Das eingeklammerte Resultat $c_1 = 0,00$ ist vielleicht ganz mißweisend, da es wohl möglich ist, daß die Phase bei der Elektrolyse mehr Wasserstoff enthalten hat, daß aber der Wasserstoff, wegen der großen Diffusion bei dieser hohen Temperatur, nach dem Strombruch schnell entweichen ist. c_2 ist auch hier viel größer als der bei Gasaufnahme erhaltene Wert $c = 0,50$. Es ist uns nicht gelungen, mit ganz kleinen Stromdichten die Phase Pd_2H ($c = 0,50$) zu erzielen.

Diese Sache war uns von besonderem Interesse, weil Borelius und Lindblom¹⁾ bei der Wasserstoffaufnahme einerseits aus der Gasphase, andererseits bei Elektrolyse eine Äquivalenz zwischen Druck und Stromdichte gefunden hatten. Sie hatten bei Eisen und 0,02 Proz. NaOH-Lösung das Druckäquivalent der Stromdichte zu etwa 17000 Atm. pro amp/cm² geschätzt. Es ist möglich, daß diese Äquivalenz nur für größere Stromdichten gilt. Der Übergang zu der wasserstoffreicheren Phase mit $c = 0,65$ geschieht bei 90° C nach Tab. 4 bei etwa 0,00013 amp/cm². Um dieselbe Konzentration durch Gasaufnahme zu erhalten, wäre ein Druck nötig, den wir durch Extrapolation der bis etwa $c = 0,62$ reichenden Messungen von Lambert und Gates bei 75 und 103° C, und durch Interpolation zwischen diesen Temperaturen, bei 90° C zu 1200 mm Hg = 1,58 Atm. berechnen. Wir berechnen hieraus den Wert des Druckäquivalenten der Stromdichte zu

$$\frac{1,58}{0,00013} = 12000 \frac{\text{atm.}}{\text{amp/cm}^2}.$$

1) G. Borelius u. S. Lindblom, Ann. d. Phys. 82, S. 201. 1927.

Die unter dem Druck von 1200 mm Hg erhaltene Phase hat indessen wahrscheinlich (vgl. Abschnitt 8) nicht dieselbe Struktur wie die elektrolytisch erhaltene, und der obige Wert dürfte eine untere Grenze sein. Er ist jedenfalls von derselben Größenordnung wie der von Borelius und Lindblom gefundene.

6. Abhängigkeit der Gitterkonstante von der Wasserstoffkonzentration

An vier elektrolytisch wasserstoffbeladenen Proben, von denen die eine durch Erwärmung auf 130° von einem Teil ihres Wasserstoffs befreit war, wurde nach der Messung der Gitterkonstante der enthaltene Wasserstoff durch Erwärmung ausgetrieben und gemessen. Die Messung geschah durch Erhitzen der Proben bis 600° in einer engen Glasröhre und Auffangen des entweichenden Wasserstoffs in einer Bürette über Wasser, daß mit Kochsalz gesättigt war. Die stark gesättigten Proben gaben bei etwa 100° einen Teil ihres Wasserstoffs sehr rasch ab. Es war dann keine merkliche Abgabe zu sehen, bis die Temperatur etwa 200° erreicht hatte. Die Resultate befinden sich in der Tab. 5.

Tabelle 5

Wasserstoffkonzentration und Gitterkonstante

Atome H auf 1 Atom Pd	Gitterkonst.	
0,82	4,057	Aufnahmen nach der Fokussierungsmethode
0,75	4,047	
0,75	4,040	
0,68	4,017	
0,50	3,978	Debyeaufnahmen

In der Fig. 7 zeigen die entsprechenden vier Punkte Proportionalität zwischen Gittererweiterung und Konzentration. Das Volumen des Pd_2H kommt aus den Messungen im Abschnitt 3 etwas kleiner heraus als was die durch die vier Punkte und Origo gezogene Gerade für 0,50 H/Pd angibt. Die somit mögliche Kontraktion bei Pd_2H kann jedoch nicht als sicher gestellt angesehen werden. Während die vier höher liegenden Punkte Präzisionsaufnahmen nach der Fokussierungsmethode

sind, ist der Punkt für Pd_3H durch Debyeaufnahmen unter beschwerlichen Umständen bei hohen Temperaturen erhalten, und systematische Fehler sind nicht ganz ausgeschlossen.

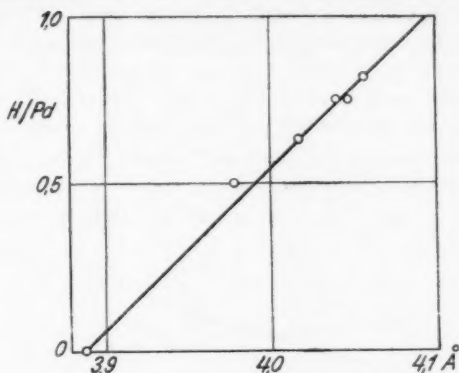


Fig. 7 Gitterkonstante

7. Stabilität der elektrolytisch erhaltenen Wasserstoffbeladung

Es ist eine oft gemachte Erfahrung, daß nach der elektrolytischen Wasserstoffbeladung des Palladiums zuerst ein kleinerer Teil des Wasserstoffs freiwillig und ziemlich schnell abgegeben wird, während ein beträchtlicher Rest bei Zimmertemperatur monate- oder jahrelang zurückbleibt und erst durch bedeutende Temperatursteigerung ausgetrieben werden kann. Es ist aber daraus ein Brauch entstanden, von Sättigung und Übersättigung in einer Weise zu sprechen, die kaum richtig sein dürfte. So gibt z. B. Fischer¹⁾ auf Grund seiner Widerstandsmessungen an, daß die Übersättigung bei 1000 Volumenteilen ($c = 0,83 \text{ H/Pd}$) beginnt und etwa 30 Volumenteile erreichen kann. Wir finden indessen weder in der Literatur noch den eigenen Versuchen eine zwingende Veranlassung, eine bestimmte Grenze zwischen einem stabilen und einem instabilen Konzentrationsgebiet zu ziehen.

Unsre eigenen Messungen geben nun, wie zum Teil schon erwähnt worden ist, folgendes. Durch Elektrolyse bei Zimmertemperatur bildet sich zunächst die Phase mit $a = 4,034$

1) a. a. O.

($c = 0,70$) aus. Sie ist sehr stabil, gibt bei Erhitzung eines Bleches von 0,1 mm Dicke im Vakuum mit einer Geschwindigkeit von etwa 100° pro Stunde erst um 100° einen kleinen Teil des Wasserstoffs ab, und dann den Rest bei etwa 200° . Wahrscheinlich ist die zurückbleibende Konzentration bei z. B.

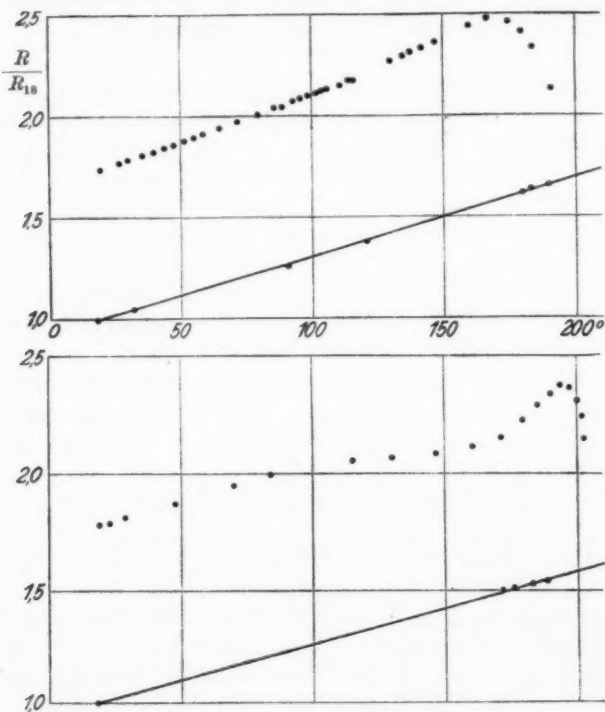


Fig. 8

100° ungefähr dieselbe wie die der bei dieser Temperatur elektrolytisch gebildeten Phase ($a_2 = 4,023$ bei 90°). Nach 20stündiger Erhitzung einer Probe in Luft bei 130° war die Gitterkonstante von 4,023 auf 4,017 heruntergegangen.

Fig. 8 zeigt zwei Versuche, die Wasserstoffabgabe durch Widerstandsmessungen zu verfolgen. Die Darstellungsweise ist dieselbe wie in der Fig. 6. Die Wasserstoffabgabe geschah in

einem evakuierten Raume unter höchstens 5 mm Druck. Die Geschwindigkeit der Temperatursteigerung betrug etwa 100° pro Stunde. Die Zersetzungstemperatur ist in der oberen Kurve, wo die Probe 0,1 mm dick war und eine Viertelstunde mit $0,005 \text{ Amp./cm}^2$ elektrolysiert wurde, etwa 170° , in der unteren, wo die Probe ein mit der wasserstoffreicheren Phase gesättigter Draht von 1 mm Dicke war, etwa 195° . Zum Vergleich führen wir an, daß die Zersetzungstemperatur des Pd_3H bei demselben Drucke, wie die Fig. 2 zeigt, unter Zimmertemperatur liegt, was die viel größere Stabilität der hier behandelten Phase deutlich macht.

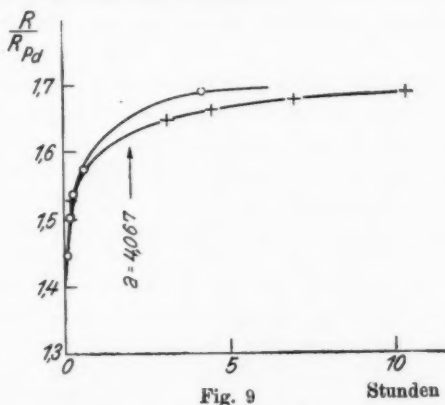


Fig. 9

Andererseits kann die Konzentration der zunächst bei Zimmertemperatur gebildeten Phase mit $a_2 = 4,034$ durch fortgesetzte Elektrolyse, wie es scheint, stetig weiter vergrößert werden, bis über $a_2 = 4,07$. Noch bei $a_2 = 4,06$ ist die Stabilität recht gut. Wir haben diese Gitterkonstante noch nach 2 Tagen innerhalb der experimentellen Unsicherheit unverändert gefunden. Bei größerer Konzentration geht indessen der Zerfall schneller, und Gitterkonstanten, wesentlich über 4,07, können nicht die für die Röntgenaufnahme nötige Zeit von einer halben Stunde bestehen bleiben, weshalb hier eine Grenze der beobachteten Gitterkonstanten (bei 4,07) erreicht ist.

Es gelingt indessen den ersten Zerfall durch Widerstandsmessungen zu verfolgen. Der Widerstand nimmt nämlich in

diesem Konzentrationsgebiete mit abnehmender Konzentration zu. Die Fig. 9 zeigt in zwei Fällen die Widerstandszunahme als Funktion der Zeit nach dem Strombruch.

8. Entwurf und Diskussion eines Zustandsdiagrammes

Das System Palladium-Wasserstoff kann vollständig nur in einem dreidimensionalen Konzentrations-Temperatur-Druckdiagramm beschrieben werden. Zunächst ist aber von Interesse, die Beziehungen zwischen Druck und Konzentration bei gegebener Temperatur zu diskutieren. Wir wählen hierzu das \sqrt{p} - c -Diagramm der Fig. 10. Um wenigstens gewisse Einzel-

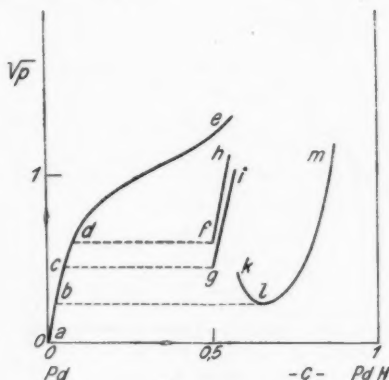


Fig. 10

heiten quantitativ richtig wiedergeben zu können, nehmen wir die bestimmte Temperatur 100° C.

a, b, c, d, e ist die bei stetiger Wasserstoffaufnahme erhaltene Kurve, die wir mit den Namen Holt, Edgar und Firth verknüpfen können. f ist das Pd_2H von Gillespie und Hall und fh die Kurve der übersättigten Verbindung. g ist die Phase von Lambert und Gates, der wahrscheinlich auch die Zusammensetzung Pd_2H zukommt, und gi entspricht wieder die übersättigte Verbindung. Die besonders bei Elektrolyse leicht erhaltene Phase beschreiben wir durch die Kurve klm , die indessen quantitativ noch ganz unbestimmt ist. Ihre Form sagt aus, daß um l der Druck klein, d. h. die

Stabilität groß ist, und daß dann mit wachsender Konzentration die Stabilität, in Übereinstimmung mit den experimentellen Erfahrungen, abnimmt. Den Geraden df , cg und bl entsprechen die zweiphasigen Zustände.

Das Auftreten der vielen verschiedenen Zustände läßt sich nun, in ähnlicher Weise wie bei gewissen im hiesigen Institute untersuchten metallischen Mischkristallreihen, durch nach Art und Grad verschiedene Ordnung unter den aufgenommenen Wasserstoffatomen erklären. Die Analogie wird besonders auffallend, wenn wir annehmen, daß sich die H-Atome (oder vielleicht nur der eine ihrer Bestandteile) zu bestimmten Pd-Atome anknüpfen, so daß wir die metallische Mischkristallreihe Pd-PdH vor uns haben.

Der Kurve $abcde$ entspricht dann, jedenfalls in ihrem ersten Teil, die statistisch ungeordnete Verteilung.

f und g sollten zwei verschieden geordneten Verteilungen der Zusammensetzung Pd_2H entsprechen. Solche verschiedene Anordnungen für ein und dasselbe Atomverhältnis ist in der Tat schon bei den metallischen Mischkristallen bekannt. So fanden Johansson und Linde¹⁾ drei verschiedene Gitteranordnungen, die wahrscheinlich der Zusammensetzung PtCu zuzuschreiben sind. Auch für das Aufhören einer bestimmten Phase, wie hier die Phasen hf und ig , bei genau 50 Atomprozent liegt schon bei dem PdCu ein Beispiel vor. Nur erscheint es schwierig, zwei verschiedene und hinreichend einfache kubische Gitteranordnungen aufzufinden, die mit dem Resultate der bisherigen Röntgenanalyse übereinstimmen sollten, daß die kubisch flächenzentrierte Symmetrie des Pd auch bei Pd_2H beibehalten ist. Es ist aber in Wirklichkeit gar nicht sicher, daß die Symmetrie beider kubisch ist. Sie kann tetragonal wie bei AuCu oder trigonal wie bei PtCu sein, wenn nur das Achsenverhältnis so nahe gleich 1 ist, daß die Abweichung mit der bis jetzt erreichten Schärfe der Beobachtung nicht entdeckt worden ist.

Auch für die Kurve klm können wir ein Gegenstück bei den metallischen Mischkristallen aufweisen. Die Zersetzungstemperaturen der geordneten Atomverteilungen in den Misch-

1) C. H. Johansson u. J. O. Linde, Ann. d. Phys. 82, S. 449. 1927.

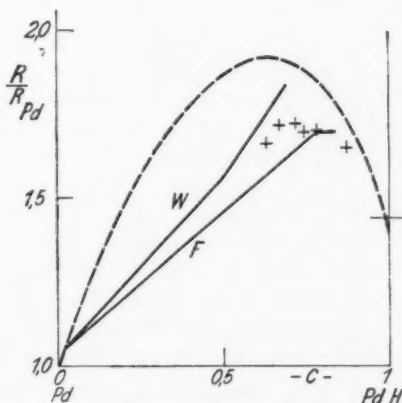
kristallreihen geben, wie aus noch nicht veröffentlichten Messungen hervorgeht, Π -förmige Kurven, deren höchsten Punkte übrigens nicht genau bei den einfachen Atomverhältnissen liegen müssen, bei denen die betreffende Ordnung vollständig sein kann. Die invertierten Werte der Zersetzungstemperaturen geben somit U-förmige Kurven und sind, wie beim Palladium-Wasserstoff der Druck, ein Maß für die Instabilität der Ordnung. Die Kurve klm könnte z. B. der Verbindung $(\text{PdH})_3\text{Pd}$ ($c = 0,75 \text{ H/Pd}$) entsprechen, in Analogie mit den kubisch symmetrischen Verbindungen Cu_3Au , Cu_3Pd und Cu_3Pt . Die in den elektrolytisch erhaltenen zweiphasigen Proben auftretende wasserstoffreiche Phase sollte, wenn unsre Deutung sonst richtig ist, dem Minimumpunkt l entsprechen. Diese liegt somit (vgl. Abschnitt 7) bei Zimmertemperatur bei $c = 0,70$ und bei 90° bei $c = 0,65$.

Dieses Zustandsdiagramm bekommt eine gute Stütze durch eine, in Zusammenhang mit den Widerstandsmessungen (vgl. den nächsten Abschnitt) erhaltene Debyeaufnahme an einem elektrolysierten Drahte, der 24 Stunden nach der Elektrolyse untersucht wurde, wo gleichzeitig zwei wasserstoffreiche Phasen mit den Gitterkonstanten 4,067 und 3,991 auftraten.

Man findet in der Literatur eine Menge Beobachtungen über Inaktivität des Palladiums, womit verstanden wird, daß das Palladium die Fähigkeit verloren hat, bei gewöhnlicher Temperatur Wasserstoff aus der Gasphase mit meßbarer Geschwindigkeit aufzunehmen. Diese Inaktivität erscheint in ausgeprägter Weise nur in kompaktem Pd, nicht in dem sehr feinverteilten. Man findet Angaben über das Auftreten und über die Möglichkeiten zum Aufheben der Inaktivität sowie auch Erklärungsversuche besonders bei Holt, Edgar und Firth. Wir haben auch selbst in mehreren Fällen diese Erscheinungen beobachtet. Ohne auf die Einzelheiten einzugehen, wollen wir darauf aufmerksam machen, daß die Ausbildung der stabilen Phase mit c gleich etwa $0,7 \text{ H/Pd}$ in den äußeren Schichten der Proben eine solche Inaktivität hervorrufen kann, und daß dies uns die natürlichste Erklärung für die Inaktivität zu sein scheint.

9. Das Widerstands-Konzentrationsdiagramm

Für das Verständnis des Palladium-Wasserstoffsystems sehr wichtig finden wir die schon erwähnte (Abschn. 7) Erfahrung, daß der Widerstand, der bis etwa $c = 0,75$ H/Pd mit der Wasserstoffkonzentration zunimmt, bei noch größeren Wasserstoffkonzentrationen wieder abnimmt. Diese Widerstandsabnahme wird besonders auffallend über etwa $c = 0,85$, d. h. beim Annähern an die Konzentration $c = 1$ entsprechend der Zusammensetzung PdH. Dies ist nun, was zu erwarten wäre, für eine Mischkristallreihe Pd-PdH. Der Ansatz, daß wir eine solche Mischkristallreihe vor uns haben, hat uns schon im vorigen Abschnitt zu einem gewissen Verständnis des Druck-Konzentrationsdiagrammes geholfen, und er bringt auch Licht über andere Einzelheiten im Widerstandsdiagramm.



W = Wolf, F = Fischer, + Linde u. Borelius

Fig. 11

Wir stellen in der Fig. 11 aus früheren und eigenen Messungen ein solches Diagramm für Zimmertemperatur zusammen.

Die obere bogenförmige Kurve sei die Widerstandskurve, entsprechend ungeordneter Verteilung der H-Atome auf die Pd-Atome. Wir haben aber nur nahe dem reinen Pd und nahe dem PdH Anzeichen dafür, daß Teile dieser Kurve wirklich

realisiert worden sind. An der Pd-Seite finden Fischer¹⁾ bei elektrolytischer Wasserstoffaufnahme und Wolf²⁾ bei Gasaufnahme übereinstimmend einen ersten verhältnismäßig steil steigenden Kurventeil bis etwa $c = 0,03$. Die Ausgangsrichtung der Kurve in Fig. 11 ist, freilich mit großer Unsicherheit, aus ihren Messungen berechnet worden. Das Kurvenstück zunächst dem PdH ist nach den eigenen Messungen gezogen worden. Hier besteht eine Unsicherheit darin, daß wir die zu dem kleinsten erreichten Widerstand gehörende Konzentration nicht genau gemessen haben. Die Richtung kann deshalb mehr oder weniger falsch sein. Der mittlere, bogenförmige, noch nicht verwirklichte Teil der Kurve ist nur in Analogie mit den Widerstandskurven bei anderen Mischkristallreihen mit ungeordneter Atomverteilung gezogen worden. Er dürfte doch an der linken Seite (wie die Kurve *abcde* in Fig. 10) weitgehend realisierbar sein.

Die Kurve von Wolf ist durch allmähliche Drucksteigerung erhalten und sollte der gebrochenen Druckkurve *adfh* in der Fig. 10 entsprechen. In der Tat findet auch Wolf Brechungspunkte teils bei $c = 0,03$, teils bei $c = 0,50$. (Beckmann³⁾ findet freilich, wenn er die Leitfähigkeitswerte von Wolf in einem Atomprozentdiagramme aufzeichnet, eine gerade Kurve von $c = 0,03$ H/Pd an. Ist die von uns angenommene Atomgruppierung Pd-PdH zutreffend, ist es aber ganz ungeeignet, das Atomprozent H/(Pd + H) als Abszisse zu wählen. Mit H/Pd als Abszisse finden wir im Widerstandsdiagramm von Wolf die Richtungsänderung bei $c = 0,50$ sehr deutlich.) Wir bemerken weiter, daß in dem zweiphasigen Gebiete zwischen $c = 0,03$ und $0,50$ die Punkte von Wolf recht unregelmäßig verteilt sind, während sie über $c = 0,50$ gut in Reihe liegen, was auch auf eine Änderung des Zustandes bei $c = 0,50$ hindeutet.

Die Kurve von Fischer ist durch fortgesetzte Elektrolyse erhalten worden und sollte die gebrochene Kurve *ablm* der Fig. 10 entsprechen. In Wirklichkeit findet Fischer zwei Brechungspunkte bei etwa $c = 0,03$ und $0,77$ und dazwischen eine gerade Kurve, entsprechend dem zweiphasigen Zustandsgebiet.

1) F. Fischer, Ann. d. Phys. 20. S. 503. 1906.

2) G. Wolf, Ztschr. phys. Chem. 87. S. 575. 1914.

3) B. Beckman, Ann. d. Phys. 46. S. 481. 1915.

Die von uns gemessenen Punkte, die teils nach verschieden weit getriebener Elektrolyse bei Zimmertemperatur, teils nach Elektrolyse bei 90° und teils nach Erhitzung einer elektrolysierten Probe bei 130° und durch abwechselnde Widerstands- und Gitterkonstantbestimmungen (vgl. Tab. 6) gewonnen sind, sollen der Kurve λ/m der Fig. 10 entsprechen. Sie stehen mit den Messungen von Fischer in gutem Einklang.

Tabelle 6
Widerstand bei 18° und Gitterkonstante

R/R_{Pd}	Gitterkonstante
1,66	4,017
1,72	4,025
1,72	4,035
1,70	4,040
1,70	4,047
1,65	4,067

Zusammenfassung

1. Mit einer Debyekamera spezieller Konstruktion wurden die Gitterkonstanten des Palladiums in Wasserstoffatmosphäre vom Drucke zwischen 0,1 und 4 Atm. und bei Temperaturen zwischen 100° und 200° gemessen.

2. Es wurden dabei zwei Phasen beobachtet. Die eine mit Gitterkonstanten zwischen $3,888 \text{ \AA}$ (reines Pd) und $3,92$, die andere mit Gitterkonstanten über $3,97$. Die wasserstoffärmere Phase ist, auch nach früheren Erfahrungen, als in Pd gelöstes H aufzufassen, die wasserstoffreichere als reines oder übersättigtes Pd_2H . Dem Pd_2H kommt eine Gitterkonstante von etwa $3,978$ zu.

3. Aus einer Diskussion früherer Arbeiten geht hervor, daß es wahrscheinlich zwei verschiedene Arten der Pd_2H gibt.

4. Unter geeigneten Umständen bildet sich noch eine dritte Phase, eine wie es scheint stetige Fortsetzung der (bei kleinen Konzentrationen leicht erhaltenen) Wasserstofflösung bis über die Konzentration des Pd_2H ($c = 0,50 \text{ H/Pd}$) hinaus.

5. Elektrolytische Beladungen wurden mit variierten Stromdichten, Zeiten und Temperaturen (20° und 90°) ausgeführt und die Gitterkonstanten der beladenen Proben nach der Fokussierungsmethode röntgenographisch bestimmt.

6. Auch bei der elektrolytischen Beladung bildet sich eine wasserstoffreiche Phase über einen zweiphasigen Zwischenzustand aus. Diese Phase hat aber eine größere Gitterkonstante als die bei Gasaufnahme erhaltene (4,034 bei 20° und 4,023 bei 90°). Sie kann weiter übersättigt werden bis über die Gitterkonstante 4,07 hinaus.

7. Es wurde eine annähernd lineare Beziehung zwischen Wasserstoffkonzentration und Gitterkonstante gefunden.

8. Widerstands-Temperaturdiagramme zeigten sich als sehr lehrreich für das Studium der Ausbildung oder Auflösung der verschiedenen Phasen.

9. Bei Konzentrationen über etwa $c = 0,85$ H/Pd nimmt der Widerstand schnell ab, woraus auf einen verhältnismäßig kleinen Widerstand bei der Zusammensetzung PdH geschlossen wird.

10. Das Druck-Konzentrationsdiagramm wird unter der Voraussetzung diskutiert, daß das System Palladium-Wasserstoff als ein metallisches Mischkristallsystem mit den Komponenten Pd und PdH aufzufassen ist, in dem (wie in den von Johansson und Linde untersuchten Systemen CuAu, CuPd und CuPt) sowohl geordnete als ungeordnete Verteilung der Komponenten auf die Gitterpunkte möglich sein sollte.

11. Ein auf Grund früherer und eigener Messungen entworfenen Widerstands-Konzentrationsdiagramm wird unter derselben Voraussetzung gut verständlich.

Stockholm, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, September 1927.

Zusatz bei der Korrektur

1. Für die ganze Untersuchung ist reinstes Pd von Heraeus benutzt worden.

2. In der oberen Fig. 8 ist die Widerstandsskala unrichtig. Statt 1,0—1, 5—2, 0—2,5 soll stehen 1,0—1, 4—1, 8—2,2.

3. Die aus Fig. 7 erhaltene Gitterkonstante des PdH (4,094 Å) kommt der des Silbers sehr nahe. Dies ist eine weitere Stütze unserer Annahme von der Existenz des Pd als atomares Gebilde im Gitter. Ein „Pseudoatom“ PdH sollte nämlich nach Grimm (Ztschr. f. Elektrochem. 31. S. 474. 1925) silberähnlich sein.

(Eingegangen 26. September 1927)

4. Über Stromverdrängung in zylindrischen Leitern von allgemeiner Querschnittsform; von F. Noether

Die Stromverdrängung in zylindrischen, von Wechselstrom durchflossenen Leitern ist in 2 Fällen ein so einfaches Problem, daß es längst in allen einschlägigen Lehrbüchern behandelt ist. Nämlich im axialsymmetrischen Fall, wenn der Querschnitt ein Kreis ist, oder im eindimensionalen Fall eines bandförmigen Leiters, dessen Breite sehr groß ist gegen seine Dicke. Dagegen ist die Behandlung ungleich schwieriger, wenn ein Querschnitt von allgemeiner Gestalt vorliegt.

Den Weg, auf dem dann die Aufgabe zu formulieren und zu lösen ist, habe ich in dem eben im Erscheinen begriffenen Bd. 13 des Handbuchs der Physik (S. 96f.) dargestellt, und möchte ihn hier noch einmal angeben, weil sich eine kürzlich an dieser Stelle erschienene Arbeit¹⁾ mit dem Fall des allgemeinen rechteckförmigen Querschnitts beschäftigt, deren Ansatz ich aber nicht für richtig ansehe.

Die Leiterachse falle in die z -Richtung und der Querschnitt sei ein beliebiges Flächenstück f in der x - y -Ebene. Die Stromdichte (bzw. elektrische Feldstärke) ist dann S_z (bzw. \mathfrak{E}_z), und in der Querschnittsebene liegen die magnetischen Feldkomponenten $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y$. Ferner sei λ die Leitfähigkeit, μ die Permeabilität des Materials, ω die Kreisfrequenz des Wechselstroms, und zur Abkürzung sei $\alpha^2 = 4\pi\omega\lambda\mu$ gesetzt. Der Zeitfaktor wird für alle Größen mit $e^{i\omega t}$ angesetzt ($i = \sqrt{-1}$).

Die Maxwellschen Gleichungen lauten nun:

$$(1) \quad \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = 4\pi S_z$$

$$(2) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t},$$

$$\text{d. h. } \frac{1}{\lambda} \frac{\partial S_z}{\partial y} = -i\omega\mu \mathfrak{H}_x, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial S_z}{\partial x} = i\omega\mu \mathfrak{H}_y.$$

Aus (1) und (2) folgt für S_z (wir lassen den Index z weiterhin weg):

1) M. J. O. Strutt, Stromverdrängung in rechteckigen Leitern; Ann. d. Phys. 83. S. 979. 1927.

$$(3) \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 4\pi\omega\lambda\mu i S = i\alpha^2 S.$$

Diese Gleichung gilt im Innengebiet des Leiterquerschnitts. Da aber keine weiteren Randbedingungen für die Stromverteilung vorliegen, außer der Vorgabe des Gesamtstroms J , so ist hieraus S natürlich noch nicht eindeutig bestimmt. Das magnetische Feld muß daher hinzugenommen und so bestimmt werden, daß es überall, auch an der Begrenzung des Querschnitts, den Stetigkeitsbedingungen entsprechend verläuft und im Unendlichen so zu 0 abnimmt, wie es dem Ampèreschen Gesetz entspricht (d. h. mit $(x^2 + y^2)^{-1/2}$). Wegen der überall gültigen Beziehung:

$$\operatorname{div}(\mu \mathfrak{H}) = \mu \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} \right) = 0,$$

kann im Innen- und Außengebiet gesetzt werden:

$$(4) \quad \mu \mathfrak{H}_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \mu \mathfrak{H}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

woraus durch Vergleich mit (2) hervorgeht, daß die „Flußfunktion“ φ im Innern des Querschnitts bis auf eine additive Konstante mit $S/i\omega\lambda$ übereinstimmt. Wir setzen also hier:

$$(5) \quad \varphi = \frac{1}{i\alpha^2} (4\pi\mu S - C)$$

und erhalten damit für das Innere des Querschnitts aus (3):

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -4\pi\mu S = i\alpha^2 \varphi + C,$$

für das ganze Außengebiet dagegen, wo kein Strom vorhanden ist ($\lambda = 0$):

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Endlich ist μ im Außengebiet als 1 anzunehmen und am Rande $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ und $\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ stetig. Wegen der Vorgabe des Gesamtstromes ist ferner für eine beliebige, um den ganzen Querschnitt herum geschlossene Linie:

$$(8) \quad \oint \mathfrak{H} ds = \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 4\pi J.$$

Die vollständige Durchführung der Aufgabe würde die Angabe einer speziellen Form des Querschnitts voraussetzen und wird immer recht mühsam sein. Prinzipiell kommen in Betracht: Bei kleinem α eine Potenzentwicklung nach α (Neumannsche Entwicklung); bei großem α eine asymptotische

Näherung; ferner auch allgemein eine Entwicklung nach zugehörigen Eigenfunktionen.

Die asymptotische Näherung erhält man durch folgende Überlegung: Je größer der Parameter α , desto mehr wird die Strömung an die Oberfläche des Leiters gedrängt, das Innere also nach (2) auch vom magnetischen Feld frei. Der Stetigkeit wegen muß dann auch außen längs der Leiteroberfläche die Normalkomponente des magnetischen Feldes verschwinden, während die Tangentialkomponente wegen der Stromschicht längs der Oberfläche nach dem Ampèreschen Gesetz unstetig werden kann. Nach (2) folgt daher, daß die Stromdichte längs der Oberfläche selbst konstant wird, da die Oberfläche eine magnetische Kraftlinie wird, die mit den Kurven konstanter Stromdichte übereinstimmen. (Aber die „Dicke“ der Stromschicht wird nicht konstant.) Man kann also im Falle großer α^2 die Stromverteilung aus der Gl. (3), mit der Randbedingung $S = \text{const.}$ längs der Oberfläche und vorgegebenem Gesamtstrom, ermitteln, ohne das Feld im Außengebiet zu berücksichtigen. Für diese Aufgabe existieren bekannte Lösungsmethoden, wie ja auch die eingangs erwähnten einfachen Fälle so behandelt werden.

Die Potenzentwicklung bei kleinem α (oder auch die allgemeine Eigenfunktionsentwicklung) erhält man am übersichtlichsten durch die Formulierung der Aufgabe als einer Integralgleichung. Diese läßt sich prinzipiell immer aufstellen; wir begnügen uns jedoch der Kürze halber mit dem Falle, daß $\mu = 1$ sei auch im Innern des Leiters, also kein eiserner Leiter vorliegt. Dann ist auch am Rande φ und $\partial \varphi / \partial n$ stetig und nach (6), (7) läßt sich φ als ein über die Punkte ξ, η des Querschnitts f erstrecktes Integral darstellen:

$$(9) \quad \varphi = -2\mu \int_f S(\xi, \eta) \log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta.$$

(Im Falle des eisernen Leiters müßte an Stelle des Logarithmus ein komplizierterer [aber gleichfalls symmetrischer] „Kern“ treten, der die Übergangsbedingungen am Rande befriedigen müßte.) Also ergibt sich für die Stromverteilung S selbst mittels (5) die im Querschnitt f gültige Integralgleichung:

$$(10) \quad S(x, y) + \frac{i\alpha^2}{2\pi} \int_f S(\xi, \eta) \log \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta = k.$$

Die Konstante k auf der rechten Seite ($= C/i\alpha^2\mu$) macht die Aufgabe zu einer inhomogenen und ist so zu bestimmen, daß der Gesamtstrom im Querschnitt $= J$ wird.

Aus allgemeinen Sätzen geht hervor, daß diese Integralgleichung für jeden physikalisch möglichen, d. h. positiven Wert α^2 lösbar ist. Denn dies gilt für jede symmetrische Integralgleichung, wenn der Faktor vor dem Integral nicht reell ist. Insbesondere ergibt sich für $\alpha^2 = 0$ (Gleichstrom) die gleichförmige Verteilung $S = k = J/f$. Indem man diesen Wert unter dem Integral für $S(\xi, \eta)$ einsetzt, bekommt man für kleine α^2 eine zweite Näherung und so fortfahrend die Lösung in Form einer Potenzreihe (Neumannsche Reihe) nach α^2 , die für hinreichend kleine α^2 konvergent ist.

Den beim Kreisquerschnitt üblichen Potenzentwicklungen der Besselschen Funktionen würde hier die Lösung der Integralgleichung mittels Fredholmscher Reihen entsprechen, die im Prinzip immer anwendbar ist.

In der oben zitierten Arbeit von Strutt ist nicht das äußere Magnetfeld zur Berechnung herangezogen, sondern statt dessen eine Randbedingung: $S = \text{const.}$ längs der Querschnittsberandung eingeführt. Wie man sieht, ist dies von unserem Standpunkt nur als asymptotische Näherung berechtigt. Denn im allgemeinen bekommt man zwar aus dieser Bedingung eine bestimmte Stromverteilung; wenn man aber dann nach Gl. (9) und (4), d. h. mittels des Biot-Savartschen Gesetzes, hieraus das Magnetfeld berechnet, so genügt dieses nicht direkt der Gl. (2) (dem Faradayschen Gesetz). Um vielmehr Übereinstimmung zu erzwingen, müßte man auch außerhalb des gegebenen Leiters noch eine bestimmte felderzeugende Stromdichte annehmen, also die Gl. (7) fallen lassen. Eine solche Formulierung erscheint aber der natürlichen Fragestellung nicht angemessen.¹⁾

Breslau, September 1927.

1) Nachträglich wurde ich auf die Arbeit von H. Schwenkhagen: Stromverdrängung in rechteckigen Querschnitten; Archiv f. Elektrotechnik 17. S. 537. 1927 aufmerksam. Die Arbeit enthält keine exakte Formulierung des Ansatzes, führt aber in der Hauptsache ein Näherungsverfahren durch, das etwa darauf hinauskommt, unsere Integralgleichung (10) durch eine Summengleichung zu ersetzen, sowie ausführliche Vergleichsmessungen.

(Eingegangen 30. September 1927)

5. *Über den Durchgang langsamer Kathodenstrahlen durch Metalle;*
von A. Becker

Es liegt bis jetzt keine sichere Erfahrung über die Durchlässigkeit fester Metalle für langsame Kathodenstrahlen vor, die nach kleinen Geschwindigkeiten hin über die frühen Beobachtungen Hrn. Lenards¹⁾, welche eine Durchlässigkeit dünnster Gold- und Aluminiumschichten gerade noch bis zu Geschwindigkeiten von 3000 bis 4000 Volt herab feststellen konnten, hinausginge. Es hat dies offenbar seinen Grund vorwiegend in der Schwierigkeit der Beschaffung und Handhabung geeigneter Schichten derjenigen geringen Dicken, welche für solche Untersuchungen in Betracht kommen.

Nachdem es in neuerer Zeit gelungen war, wohldefinierte, hinsichtlich der Dicke homogene dünnste Metallhäute herzustellen²⁾, schien es weniger aussichtslos, das Problem mit Erfolg in Angriff zu nehmen. Über die bei diesem Versuch bis jetzt erzielten Ergebnisse soll im folgenden berichtet werden. Das genauer untersuchte Geschwindigkeitsgebiet liegt zwischen 100 und 4500 Volt; in einzelnen Fällen erstreckt es sich bis zu 2 Volt herab. Die Strahlerzeugung erfolgt glühelektrisch, um die Strahlintensität in sehr weiten Grenzen variieren zu können. Als Absorptionsmedien kommen die Metalle Nickel, Gold und Aluminium zur Verwendung.

Die Versuche lassen in qualitativer Hinsicht die für das untersuchte Geschwindigkeitsgebiet charakteristischen Verhältnisse klar erkennen. Sie führen außerdem zu einer Reihe quantitativer Feststellungen, die die bisherige Kenntnis des Kathodenstrahldurchgangs durch feste Medien wesentlich erweitern. Sie zeigen schließlich, daß das Verhalten der Metalle

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 462. 1903.

2) C. Müller, Sitzber. Preuß. Ak. d. Wiss. phys.-math. Kl. 1925, S. 464; K. Lauch u. W. Ruppert, Physik. Ztschr. 27. S. 452. 1926.

langsamen Kathodenstrahlen gegenüber nicht lediglich durch deren Masse oder auch durch die chemische Natur bestimmt wird, sondern daß offenbar auch deren besondere physikalische Struktur eine Rolle spielt und zu bemerkenswerten selektiven Erscheinungen führen kann, die an Schichten genauer definierter Struktur noch weiter zu untersuchen sind.

I. Versuchsanordnung

Zu den Versuchen haben zwei im Prinzip gleiche und nur in der konstruktiven Ausführung verschiedene Anordnungen gedient, von denen die eine durch Fig. 1 veranschaulicht wird.

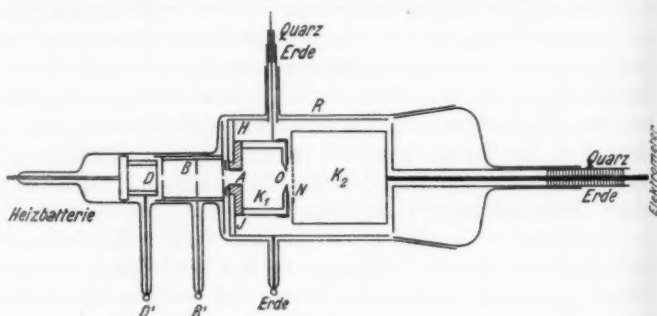


Fig. 1

Der an einem glühenden Wolframband D entstehende Kathodenstrahl tritt nach scharfer Ausblendung durch ein Blendensystem B als zylindrisches Bündel von etwa 1 mm Durchmesser in den Meßraum ein. Dieser wird von einer in der Glasröhre R befindlichen geerdeten Messinghülle H begrenzt, in welche zwei voneinander und gegen Erde isolierte Metallkäfige K_1 und K_2 eingebaut sind. K_1 kann mit einem Quadrantelektrometer oder einem Galvanometer in Verbindung gesetzt werden, während K_2 dauernd zu einem zweiten Quadrantelektrometer geleitet ist. Die zu messende Metallschicht bedeckt entweder die Öffnung A oder die Öffnung O des Käfigs K_1 .

Die Strahlbeschleunigung erfolgt zwischen D und B mit Hilfe einer an den Zuführungen D' B' angelegten Spannungsdifferenz. Zu deren Erzeugung dienen Spannungsbatterien bis 2500 Volt und eine Gleichstromhochspannungsmaschine, die

maximal 3500 Volt liefert. Alle benutzten Spannungen werden während der Versuche dauernd mit Hilfe statischer Voltmeter bzw. dynamischer Präzisionsinstrumente gemessen und kontrolliert. Die erforderlichen Zuführungen sind soweit möglich in das Glas der Versuchsröhre eingeschmolzen. Die zu den Elektrometern führenden Elektroden haben Quarzisolation. Der Käfig K_1 ist auf der Vorderplatte von H mit Hilfe eines eingeschraubten Bernsteinrings J genau zentrisch befestigt. Zur Evakuierung dient eine große Stahldiffusionspumpe, die während der Beobachtung dauernd in Gang ist; zur Kühlung dient flüssige Luft.¹⁾

Die zweite der benutzten Anordnungen unterscheidet sich von der eben betrachteten insbesondere dadurch, daß sie eine leichtere Auswechslung und Prüfung der Metallfolien ermöglicht, dafür aber nur galvanometrische und nicht auch elektrometrische Messung der Ladungen von K_1 zuläßt.

II. Meßverfahren

Die beabsichtigte Untersuchung erfordert die Feststellung sowohl der *Menge* als der *Geschwindigkeiten* der aus der Rückseite einer betrachteten Schicht austretenden Elektronen. Hieraus soll soweit möglich auf die Durchlässigkeit der Schicht bzw. die Strahlabsorption, auf die Geschwindigkeitsänderungen und die damit zusammenhängenden Energieumsetzungen geschlossen werden.

1. *Messung der austretenden Elektronenmenge.* — Es wird hierzu die hintere Öffnung O des Käfigs K_1 mit der zu untersuchenden Schicht völlig abgedeckt. Die aus ihr hinten austretenden Elektronen werden vom Käfig K_2 aufgenommen und durch das Elektrometer gemessen. Dieser Käfig hat so große Dimension, daß ein Elektronenverlust durch die verhältnismäßig große Auffangeöffnung praktisch unwesentlich ist. Ebenso wenig ist, wie Kontrollversuche zeigen, mit einer fühlbaren Störung durch Rückdiffusion oder Sekundärstrahlerregung an dem sehr feindrähtigen und dünn berußten Netz N zu rechnen, das wesentlich weniger als 1 v. H. der ankommenden Elektronen abfängt.

1) Dieselbe ist wiederum sehr entgegenkommend von der I. G. Farbenindustrie in Ludwigshafen zur Verfügung gestellt worden.

Gleichzeitig mit K_2 erhält auch der Käfig K_1 eine negative Ladung, die bei guter Durchlässigkeit der Metallfolie elektrometrisch, andernfalls galvanometrisch gemessen wird. Diese Messungen müssen bei vollständiger Feldfreiheit bzw. Abwesenheit eines elektronenverzögernden Feldes zwischen beiden Käfigen ausgeführt werden, damit keinerlei Behinderung des Elektronenaustritts aus der Meßschicht vorhanden ist. Eine etwaige Kontaktpotentialdifferenz zwischen K_1 und K_2 muß also bekannt und, falls sie elektronenverzögernd wirkt, kompensiert werden. Da die von K_1 aufgenommenen Elektronenladungen meist viel größer sind als die von K_2 aufgenommenen, so muß die bei elektrometrischer Messung beider Ladungen infolge geringer Aufladung der Käfige auftretende Spannungsdifferenz, da sie elektronenbeschleunigend wirkt, nicht berücksichtigt werden.

Die Summe der beiden Ladungen von K_1 und K_2 gibt streng, unbeeinflusst von Rückdiffusion und Sekundärstrahlung, die gesamte Elektronenmenge an, welche bei jedem einzelnen Versuch in den Käfig K_1 eintritt. Man erhält hieraus die auf die Folie bei O auftreffende Menge, wenn eine kleine, bei unbedeckter Öffnung zu findende Korrektur angebracht wird, welche denjenigen Teil der Strahlung berücksichtigt, der infolge Streuung am letzten Blendenrand unmittelbar die Wände von K_1 trifft.

Die Beobachtung ist nur dann verwertbar, wenn der Käfig K_2 tatsächlich nur solche Elektronen empfängt, die aus der Rückseite der Metallfolie austreten, wenn also keine Elektronen auf irgendwelchen andren Wegen zu ihm gelangen. Da die Elektronenmenge *vor* der Schicht meist viel größer ist als *hinter* ihr, so würde ein auf irgendwelchen Umwegen erfolgreiches Eindringen schon eines kleinen Bruchteils der von der Strahlquelle gelieferten Elektronen in den Raum von K_2 eine empfindliche Störung des Versuchs bedeuten. Es zeigt sich, daß es sehr sorgfältiger Abschirmung von K_2 bedarf, um diese Fehlerquelle vollständig auszuschalten, da langsame Elektronen durch wiederholte Reflexion an festen Wänden unschwer lange Umwege zurücklegen können.

Zur Prüfung wird die Öffnung O mit dickeren Metallschichten bedeckt, die mit möglichst intensiven Kathoden-

strahlen bestrahlt werden. Die benutzten Anordnungen zeigten beispielsweise keine meßbare Aufladung von K_2 , wenn O mit einem Aluminiumblech von $50\ \mu$ Dicke oder mit einer Nickelfolie von $1,8\ \mu$ Dicke bedeckt wurde und Kathodenstrahlintensitäten bis zu 10^{-5} Weber bei einer Variation der Geschwindigkeit von 10 bis 4500 Volt benutzt wurden. Die besprochene Fehlerquelle ist hiernach völlig ausgeschaltet. Der Versuch zeigt gleichzeitig, daß die genannten Medien von den Strahlen des ganzen benutzten Geschwindigkeitsbereichs zweifellos weniger als 10^{-10} der auffallenden Intensität hindurchlassen. Er zeigt ferner, daß in diesen Fällen auch keine Mitwirkung von Hochfrequenzstrahlung merkbar wird.

Eine weitere Voraussetzung der Brauchbarkeit einer Messung ist die der *Lochfreiheit*, strenger der *Dickenhomogenität* der Schicht. Eine *optische Prüfung* derselben vor und nach dem Versuch ist naturgemäß unerlässlich. Diese Prüfung führt zweifellos bei durchsichtiger Schicht zu einiger Sicherheit in ihrer Beurteilung. Bei dickeren Schichten läßt die Prüfung im vollen Sonnen- oder Bogenlicht zwar im allgemeinen noch sehr kleine etwa vorhandene Löcher entdecken; feinste Poren können aber immerhin, ebenso wie auch bei durchsichtiger Schicht, der Wahrnehmung entgehen. Es ist daher erforderlich, die optische Untersuchung durch eine *Prüfung auf Gasdurchlässigkeit* zu ergänzen. Bei dünnsten Schichten ist dies allerdings nicht ohne Schwierigkeit durchführbar.

Man muß daher versuchen, auch aus dem Verhalten der Schichten gegenüber den Kathodenstrahlen selbst Kriterien zu entnehmen, die eine Beurteilung der Schicht ermöglichen. Solche lassen sich in der Tat mehrere finden, worauf wir im folgenden zurückkommen werden.

2. *Bestimmung der Strahldurchlässigkeit.* — Bezeichnet man der Anschaulichkeit halber mit K_1 bzw. K_2 die von den entsprechenden Käfigen bei einer Messung aufgenommenen Ladungen, und ist m der Bruchteil der in K_1 eintretenden Elektronenmenge, welcher die Fläche der Öffnung O trifft, so stellt $m \cdot [K_1 + K_2]$ die auf die Metallschicht auftreffende Menge dar. Dieselbe kommt nur dann restlos für die Durchlässigkeitsbestimmung in Betracht, wenn eine einheitliche Elektronengeschwindigkeit vorliegt. Die Geschwindigkeits-

messung, auf die im folgenden einzugehen sein wird, zeigt nun, daß neben der weit überwiegenden Menge von Elektronen, deren Geschwindigkeit durch die beschleunigende Spannungsdifferenz bestimmt und als praktisch einheitlich anzusehen ist, stets ein kleiner, mit der Geschwindigkeit der Hauptmenge variierender Bruchteil sehr langsamer, sekundärer Elektronen vorhanden ist. Dieser Bruchteil $(1 - p)$ ist bei der Durchlässigkeitsbestimmung, solange sie merklich höhere Strahlgeschwindigkeiten betrifft, in Abzug zu bringen, so daß für die auffallende Menge der Betrag von $m \cdot p \cdot [K_1 + K_2]$ in Rechnung zu setzen ist.

Es ist weiter zu beachten, daß die durch K_2 gemessene Elektronenmenge nicht einfach identisch ist mit der Menge derjenigen primären Elektronen, welche die Schicht zu durchdringen vermögen, sondern daß sie auch alle sekundären Elektronen umfaßt, welche aus der Hinterfläche austreten. Deren relativer Anteil $(1 - q)$ ist mit Hilfe der Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen bestimmbar. Es ist dann auch die die Schicht durchdringende Primärmenge $q \cdot K_2$ bekannt.

Der Ausdruck $\frac{q}{m \cdot p} \cdot \frac{K_2}{K_1 + K_2}$ stellt das wahre Verhältnis der durch die Schicht hindurchtretenden und der auf sie auffallenden Elektronenmenge dar. Er kann als praktisches Maß der Durchlässigkeit der Schicht gelten. Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten des Mediums ist er im gegenwärtigen Fall der vorliegenden Versuche nicht unmittelbar geeignet. Denn einerseits bleibt die Rückdiffusion der Strahlen unbeachtet, und andererseits sind die benutzten Schichten für das untersuchte Geschwindigkeitsgebiet der Strahlen schon so dick, daß beträchtliche Geschwindigkeitsverluste auftreten und der nach obigem berechnete Absorptionskoeffizient keiner einheitlichen Geschwindigkeit zugeordnet werden könnte. Den so berechneten Werten darf indes immerhin eine gewisse Bedeutung zuerkannt werden, solange die Schwierigkeiten, die einer direkten einwandfreien Bestimmung der Absorptionskoeffizienten im Wege stehen, nicht überwunden sind. Sie stellen nämlich, wenn sie jeweils der Geschwindigkeit der auffallenden Strahlen zugeordnet werden, Maximalwerte dar, unterhalb deren die richtigen Absorptionskoeffizienten liegen.

3. *Geschwindigkeitsmessung.* — Die Methode der Geschwindigkeitsmessung der vom Käfig K_2 aufgefangenen Elektronen besteht darin, daß zwischen K_1 und K_2 ein verzögerndes elektrisches Feld meßbar veränderlicher Stärke angelegt wird, während zwischen B und K_1 durchweg Feldfreiheit erhalten bleibt. Es kommen hierfür zwei Schaltungen in Betracht, die in einer früheren Arbeit¹⁾ ausführlich beschrieben worden sind. Sind die beiden Öffnungen A und O des Käfigs K_1 unbedeckt, so daß die einfallende Strahlung zur Untersuchung kommt, oder befindet sich die Meßschicht auf der Öffnung A des Käfigs K_1 , so kommen die wahren Elektronengeschwindigkeiten zur Messung. Bedeckt die Meßschicht dagegen die Öffnung O , so kommen auch die schief aus ihr austretenden Elektronen zur Messung, und man erhält die Verteilung der Normalkomponenten der Geschwindigkeiten. Da die Geschwindigkeitsmessungen meist im Zusammenhang mit Durchlässigkeitsmessungen ausgeführt worden sind, so kommen im folgenden vorzugsweise die Normalkomponenten zur Betrachtung. Die gegenwärtig wichtigen Schlußfolgerungen aus diesen Messungen würden bei Betrachtung der vollen Geschwindigkeiten ganz dieselben bleiben.²⁾

Daß etwaige Kontaktpotentialdifferenzen zwischen den Elektroden des Meßfelds zu berücksichtigen sind, ist schon oben hervorgehoben worden. Man bestimmt sie leicht dadurch, daß man die Beobachtung auf kleine elektronenbeschleunigende Meßfelder ausdehnt. Die jeweils angelegten, durch das Voltmeter meßbaren Spannungsdifferenzen sind dann entsprechend zu korrigieren, um die wahren Spannungsdifferenzen im Meßfeld zu erhalten. Die folgenden Angaben beziehen sich durchweg auf die korrigierten Werte.

III. Messungen an homogenen Nickelschichten

Für die Messungen standen mehrere völlig einwandfreie Nickelfolien von etwa $0,04 \mu$ Dicke zur Verfügung.³⁾ Dieselben

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 257. 1925.

2) Über die Beziehungen zwischen der Verteilung der vollen Geschwindigkeiten und ihrer Normalkomponenten vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393. 1919.

3) Ich verdanke dieselben teilweise dem freundlichen Entgegenkommen von Hrn. Dr. C. Müller, teilweise wurden sie von dem Laboratorium Dr. K. Mey bezogen.

waren elektrolytisch hergestellt, völlig glatt auf runden Kupfer-
rähmchen von 6 mm Innendurchmesser aufgespannt und, wie
die optische Untersuchung zeigte, in der Dicke vollkommen
homogen.

a) Durchlässigkeit

Um etwaige Veränderungen während der Bestrahlung zu
erkennen, wurden die Messungen wiederholt bei zu- und ab-
nehmender Strahlgeschwindigkeit ausgeführt, wobei vielfach
auf eine als Bezugspunkt festgehaltene Geschwindigkeit zurück-
gegangen wurde. Namentlich beim Übergang zu den kleinen
Geschwindigkeiten waren immer nach längerer Beobachtung
Veränderungen zu erkennen, die — offenbar infolge der starken
Strahlabsorption in diesem Gebiet — mehrfach zu einer Zer-
störung der Schicht führten. Es war daher mehrmals während
der Versuche eine Auswechslung der Schicht erforderlich.

Die Ergebnisse der Messungen finden sich in Fig. 2 durch
die Kurven a und a' dargestellt. Sie vereinigen die Beobach-
tungen an drei gleichdicken Schichten. Die Abszissenwerte
geben die Voltgeschwindigkeiten der auffallenden Strahlen an.
Die Ordinaten verzeichnen das Verhältnis der aus der Schicht
insgesamt hinten austretenden (K_2) und der auf sie vorn auf-
fallenden, wie oben angegeben korrigierten Elektronenzahl
($mp[K_1 + K_2]$). Die Kurve a' stellt die in vergrößertem Maß-
stab gezeichnete Fortsetzung der Kurve a nach kleinen Ge-
schwindigkeiten hin dar.

Es liegt, wie man sieht, im ganzen untersuchten Ge-
schwindigkeitsbereich von 100—4300 Volt ein glatter Verlauf
der Kurven vor. Irgendwelches selektive Verhalten ist mit
Sicherheit nirgends zu erkennen. Sollte ein solches infolge
der verhältnismäßig großen benutzten Geschwindigkeitsintervalle
sich der Beobachtung entzogen haben, so könnte es jedenfalls
nur wenig ausgeprägt sein, und in solchem Falle würde auch
bei Verwendung viel kleinerer Intervalle die erzielte, aus der
Lage der Beobachtungspunkte ersichtliche Versuchsgenauigkeit
kaum ausreichen, es genügend sicherzustellen.

Die Übereinstimmung der mit den einzelnen Schichten
erhaltenen Ergebnisse ist sehr befriedigend. Zufällige Ver-
schiedenheiten in den Eigenschaften der Schichten machen sich
also meist nicht bemerkbar. Es ist daher kaum zweifelhaft,

daß der beobachtete Verlauf als charakteristisch für eine homogene einwandfreie Nickelschicht der benutzten Dicke und der erwähnten Herstellungsart angesehen werden darf. Eine größere Unsicherheit tritt nur bei den kleinsten Geschwindigkeiten auf; wir werden auf deren Ursachen an späterer Stelle (III, b 2) zu sprechen kommen.

Um aus den Kurven die Abhängigkeit der „Durchlässigkeit“ von der Strahlgeschwindigkeit zu ermitteln, bedarf es der

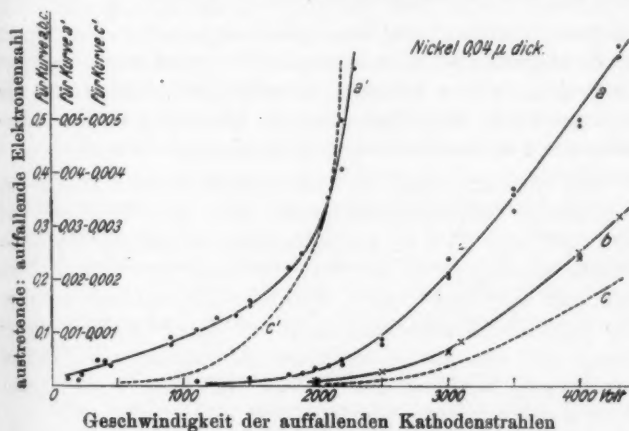


Fig. 2

Abtrennung der Sekundärelektronen aus der die Schicht verlassenden Gesamtelektronenmenge K_2 . Die Möglichkeit dieser Abtrennung beruht auf dem Geschwindigkeitsunterschied der sekundären und primären Elektronen, der im allgemeinen auch dann noch deutlich hervortritt, wenn die Primärelektronen bereits erhebliche Geschwindigkeitsverluste im untersuchten Medium erlitten haben.¹⁾

Daß im austretenden Strahl tatsächlich ein großer Anteil an sehr kleinen Geschwindigkeiten vorhanden ist, zeigt sich sofort, wenn ihm ein schwaches elektrisches Feld entgegengestellt wird. Die vom Käfig K_2 aufgefangene Elektronenmenge nimmt dann stark ab. Beispielsweise geht Kurve *a*

1) Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 228. 1925.

durch Anlegen einer Gegenspannung von 4 Volt zwischen K_1 und K_2 in die viel tiefer liegende Kurve b (Fig. 2) über.

Um alle Sekundärstrahlen auszuschalten, muß das Ergebnis eingehender Geschwindigkeitsmessung, das wir im folgenden Abschnitt b) im einzelnen nachweisen, berücksichtigt werden (vgl. Tab. 2). Es geht dann Kurve a in c und a' in c' über. Die beiden gestrichelten Kurven c und c' geben also den Gang des oben betrachteten Ausdrucks $\frac{q}{m p} \frac{K_2}{K_1 + K_2}$ und damit jetzt rein den Gang der Durchlässigkeit der Schicht mit der Strahlgeschwindigkeit wieder. Vergleicht man die Lage der drei Kurven a , b und c , so zeigt sich, daß durch die Gegenspannung von 4 Volt schon die Mehrzahl aller Sekundärelektronen am Eintritt in den Käfig K_2 verhindert wird.

Die Durchlässigkeit der untersuchten Schicht nimmt mit abnehmender Strahlgeschwindigkeit stark ab. Während bei 4000 Volt noch 15 v. H. der auffallenden Strahlung hindurchzutreten vermag, ist es bei 2000 Volt noch 0,27 v. H. und bei 1000 Volt nur noch 0,02 v. H. Eine angenäherte Aussage über die Absorptionskoeffizienten α und einen Vergleich dieser Aussage mit den aus einwandfreien Absorptionsmessungen in Luft hergeleiteten, auf die Einheit der Dichte D bezogenen Absorptionskoeffizienten¹⁾ enthält Tab. 1.

Tabelle 1

Strahlgeschwindigkeit		Nickel		Luft
V	v	α	α/D	α/D
Volt	Lg.	cm^{-1}	$\frac{\text{cm}^{-1}}{\text{g/cm}^3}$	$\frac{\text{cm}^{-1}}{\text{g/cm}^3}$
kleiner als				
4000	0,124	$4,7 \cdot 10^5$	$5,2 \cdot 10^4$	$3,5 \cdot 10^5$
3000	0,110	8,0	9,0	6,5
2000	0,0883	14,8	16,6	12,0
1000	0,0626	21,3	23,9	23
500	0,0442	24,3	27,3	50

1) Nach P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen, Tab. III S. 562. Heidelberg 1918 und 1925; vgl. auch P. Lenard u. A. Becker, Kathodenstrahlen, Handbuch der Experimentalphysik von W. Wien u. F. Harms, Tab. 9. S. 178. 1927.

Die angegebenen Werte von a/D sind für die Nickelschicht rund 10mal kleiner als für Luft. Da sie, wie wir oben zeigten, eine obere Grenze darstellen, die zweifellos lange nicht erreicht wird, so ist der Unterschied in Wirklichkeit offenbar noch erheblich größer. Dieses Ergebnis ist qualitativ in Einklang mit älteren Versuchen an Strahlen von etwa $\frac{1}{3}$ Lichtgeschwindigkeit (Lg), welche unzweifelhaft ergeben haben, daß die Absorption des Aluminiums gegenüber Luft um etwa 20 v. H. geringer ist als massenproportional.¹⁾ Es zeigt ferner, daß die Abweichung von der Massenproportionalität mit sinkender Strahlgeschwindigkeit erheblich wächst, wie dies seit langem für Gase bekannt ist, wo diese Abweichung aber erst bei geringerer Geschwindigkeit deutlich hervortritt.²⁾

Ebenso wie bei Gasen macht sich bei dem untersuchten Metall mit sinkender Strahlgeschwindigkeit eine Annäherung der Durchlässigkeit an einen unteren Grenzwert bemerkbar, der verhältnismäßig bald erreicht zu werden scheint. Wie weit derselbe nach kleinsten Geschwindigkeiten hin erhalten bleibt, lassen die gegenwärtigen Durchlässigkeitsbestimmungen noch nicht entscheiden (vgl. hierzu auch den folgenden Abschnitt b2).

b) Elektronengeschwindigkeiten

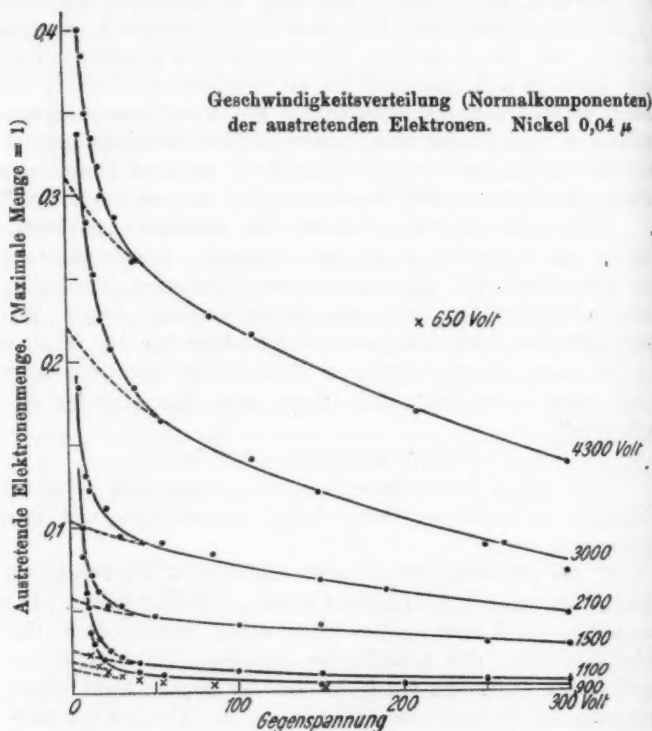
Wir gehen jetzt näher auf die an den oben benutzten Schichten ausgeführten Geschwindigkeitsmessungen und ihre Verwertung ein.

1. *Die Abtrennung der Sekundärstrahlung.* — Wir betrachten hierzu die in Fig. 3 zusammengefaßten Meßergebnisse. Die ausgezogenen Kurven geben für sieben verschiedene Geschwindigkeiten der auffallenden Strahlen, die jeweils beschrieben sind, den Gang der aus der Nickelschicht hinten austretenden Elektronenmenge mit der als Abszisse verzeichneten entgegengeschalteten Spannungsdifferenz. Diese Elektronenmenge wird, wie man sieht, in allen Fällen schon durch kleine Gegenspannungen von wenigen Volt außerordentlich verringert, und die Verringerung wächst in dem untersuchten Bereich stark mit abnehmender Strahlgeschwindigkeit. Unter

1) Vgl. P. Lenard u. A. Becker, Kathodenstrahlen, S. 175. Anmerkung 44.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 714. 1903.

den austretenden Elektronen sind also stets in großer Menge sehr kleine Geschwindigkeiten vorhanden. Der weitere Abfall der Kurven nach größeren Gegenspannungen hin zeigt an, daß außerdem unter den austretenden Elektronen auch größere Geschwindigkeiten vertreten sind, die aber an Zahl merklich



geringer sind und, wie der flachere Weiterlauf der Kurven erkennen läßt, auf ein größeres Geschwindigkeitsgebiet verteilt sind. Das ganze Kurvenbild erscheint als eine Über-einanderlagerung von zwei charakteristischen Kurvenzügen, nämlich einem rasch und einem viel langsamer abfallenden Kurventeil.

Dieses Bild entspricht ganz der Geschwindigkeitsverteilung, welche früher¹⁾ für die von der Eintrittsseite eines bestrahlten Leiters ausgehenden Elektronen beobachtet wurde, und welche als Ergebnis einer Übereinanderlagerung von sekundären und aus dem Medium rückkehrenden primären Elektronen aufzufassen war. Wir können dementsprechend auch jetzt den ersten Kurvenabfall im wesentlichen den sekundär erzeugten und den sich anschließenden flacheren Kurvenlauf den durch die Schicht hindurchtretenden primären Elektronen zuordnen. Eine Trennung beider wird dann offenbar in ausreichender Annäherung dadurch möglich, daß man eine Extrapolation des flacheren Kurvenlaufs nach kleinen Gegenspannungen hin vornimmt, wie dies durch die in ihrem Verlauf allerdings noch mit einiger Unsicherheit behafteten gestrichelten Linien der Fig. 3 versucht worden ist. Man kommt dann zu den in Tab. 2 verzeichneten Mengenverhältnissen von sekundären und primären Elektronen, deren Genauigkeit naturgemäß durch diejenige des Extrapolationsverfahrens bedingt bleibt.

Tabelle 2

Strahlen- geschwindigkeit	Von den an der Rückseite der Nickelschicht austretenden Elektronen sind	
	primäre	sekundäre
4300 Volt	31 v. H.	69 v. H.
3000 "	22 "	78 "
2100 "	10,5 "	90 "
1500 "	5,6 "	94,4 "
1100 "	2,6 "	97,4 "
900 "	1,8 "	98,2 "
650 "	1,4 "	98,6 "

Bei weiterer Verringerung der Strahlgeschwindigkeit tritt der relative Anteil der Sekundärelektronen wieder mehr zurück, wie es der Kenntnis vom Vorhandensein eines Optimums der Sekundärstrahlung bei einigen hundert Volt Primärgeschwindigkeit entspricht. Die anfängliche große Steilheit der Geschwindigkeitsverteilungskurven wird also wieder geringer, und es tritt die auf den ersten Blick sehr auffallende Erscheinung ein, daß die aus der Hinterseite einer Folie austretende Elek-

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 228. 1925.

tronenmenge durch ein schwaches Gegenfeld relativ viel weniger geschwächt wird bei geringer als bei größerer Strahlgeschwindigkeit. Dieser Fall wird durch die beiden Verteilungskurven e und f der Fig. 5 veranschaulicht, die einer Primärgeschwindigkeit von 450 bzw. 225 Volt entsprechen. Wir kommen auf diese Kurven im nachfolgenden (III, b2) näher zurück.

Letzten Endes sind die Sekundärelektronenmengen nicht der Geschwindigkeit der auffallenden, sondern wohl im wesentlichen derjenigen der austretenden Primärstrahlen zuzuordnen, da es sich nach gegenwärtiger Kenntnis offenbar um eine Oberflächensekundärstrahlung handelt und die Möglichkeit eines Austritts aus tieferen Schichten nicht nachgewiesen ist. Wegen der, wie wir zeigen werden, beträchtlichen Inhomogenität der Geschwindigkeit der austretenden Strahlen handelt es sich praktisch um eine Summenwirkung vieler Einzelgeschwindigkeiten, die nicht ohne weiteres in ihre Einzelsummanden zerlegbar ist. Aus gleichem Grunde ist auch aus Beobachtungen der Eintrittssekundärstrahlung an fester Schicht keine einfache Zuordnung von Primärgeschwindigkeit und sekundärer Menge herleitbar, wie dies bisweilen versucht worden ist. Es kann daher auch ohne eingehende Geschwindigkeitsanalyse sowohl der eine Schicht durchdringenden als der von ihr rückdiffundierten Primärelektronen ein zuverlässiger Mengenvergleich der Ein- und Austrittssekundärstrahlung nicht durchgeführt werden. Eine Oberfläche wird um so mehr sekundär strahlen, je mehr die sie in irgendeiner Richtung durchsetzende Primärgeschwindigkeit der optimalen benachbart ist. Es ist daher leicht möglich, daß in gewissen Fällen zwischen Eintritts- und Austrittssekundärstrahlung überhaupt nicht wesentlich der vermeintliche Unterschied in der gegenseitigen Orientierung des erregenden primären und des erregten sekundären Strahls vorhanden ist. Wenn die Eintrittssekundärstrahlung überwiegend von verlangsamten rückkehrenden Primärstrahlen erregt würde, würden auch hier beide Strahlen gleiche Richtung haben.

2. *Geschwindigkeit der hindurchtretenden Primärstrahlen.* — Die Kurven der Fig. 3 zeigen, daß die Geschwindigkeit der durch die untersuchten Nickelfolien hindurchtretenden Primär-

strahlen keineswegs homogen ist, sondern daß sehr verschiedene Geschwindigkeiten, offenbar bis zu den kleinsten Werten herab vertreten sind. Es treten also im allgemeinen sehr uneinheitliche Geschwindigkeitsverluste im Medium auf.

Um sie vollständig zu überblicken, ist es erforderlich, den Kurvenverlauf auch noch bei größeren Gegenspannungen zu verfolgen. Man benutzt hierzu mit Vorteil eine Schaltung, welche unmittelbar die Geschwindigkeitsverringerung messen läßt, die die austretenden Strahlen erfahren haben. Dies Verfahren ist aber nur dann anwendbar, wenn eine völlig konstante Spannungsquelle für die ursprüngliche Strahlbeschleunigung vorliegt, so daß Influenzstörungen vermeidbar sind. Es konnte daher gegenwärtig nur auf die weniger hohen Strahlgeschwindigkeiten ausgedehnt werden, die mit den verfügbaren Spannungsbatterien erreichbar waren. Die Folien wurden jetzt auch auf die vordere Öffnung A des Käfigs K_1 gelegt, so daß zum Zweck der Vereinfachung der Kurvendeutung nicht mehr Normalkomponenten sondern die vollen Geschwindigkeiten der die Folien nahe vertikal verlassenden Elektronen gemessen wurden.

Die für 4 Strahlgeschwindigkeiten erhaltenen Ergebnisse finden sich in Fig. 4. Unter den hindurchtretenden Strahlen ist in keinem Fall die ursprüngliche Geschwindigkeit nachweisbar vertreten, sondern der Beginn des Kurvenanstiegs weist stets auf einen mehr oder weniger großen Geschwindigkeitsverlust hin. Etwas auffallend ist das Verhalten des 1500-Voltstrahls, bei dem sich ein geringer Anteil (\times) nur wenig verlangsamter Strahlen (1 Skalenteil, entsprechend etwas weniger als 0,1 v. H. der insgesamt austretenden Menge) bemerkbar machte. Da diese Versuche die letzten von mehreren Versuchsreihen waren und die Folie beim anschließenden Übergang zu Messungen bei sehr geringer Strahlgeschwindigkeit zerstört worden ist, so ist das Auftreten dieser schnellen Strahlen vielleicht als erstes Anzeichen einer beginnenden Verletzung der Folie infolge der Bestrahlung anzusehen, die aber jedenfalls nur erst sehr geringfügig sein konnte. Bei den andern Versuchen ist eine solche Verletzung, wie der Kurvenverlauf zeigt, zweifellos als vollständig ausgeschlossen zu betrachten. Denn es treten hier keine Strahlen auf, die weniger als 200 Volt

Geschwindigkeitsverlust erlitten hätten und also durch Löcher gegangen sein könnten.

Die ausgezogenen Kurvenstücke stellen für die 650-, 900- und 1050-Voltstrahlen die gesamte austretende Primärstrahlung dar. Was an den Kurven bis zur Ordinatenhöhe 1 fehlt, ist als Sekundärstrahlung anzusehen. Um die durch den Kurvenverlauf ausgedrückten Eigenschaften der Primärstrahlen leichter erkennen zu können, sei kurz die die schnelleren Kathodenstrahlen betreffende Kenntnis des Geschwindigkeitsverlustes¹⁾ zusammengefaßt.

Bei sehr schnellen Strahlen ist der Geschwindigkeitsverlust in dünnen Schichten klein und nahe einheitlich. Mit ab-

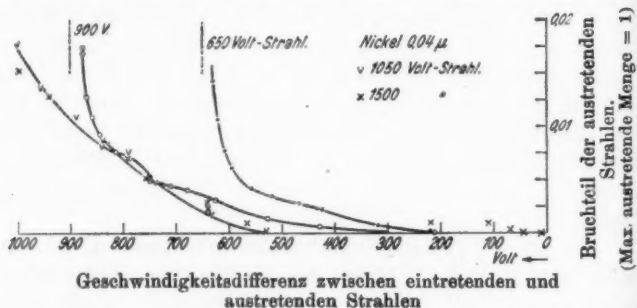


Fig. 4

nehmender Strahlgeschwindigkeit wächst der Verlust, und der Bereich der durchgehenden Geschwindigkeit erweitert sich derart, daß an eine maximal vertretene, verringerte Geschwindigkeit sich weniger vertretene kleinere und größere Geschwindigkeiten anschließen.

Die mitgeteilten Kurven zeichnen sich alle durch einen erst schnellen Abfall, einen sich daran anschließenden flacheren Verlauf und das Auftreten einer mehr oder weniger deutlich ausgeprägten Inflexion aus. Letztere deutet ein Maximum in der Geschwindigkeitsverteilung an, und die Steilheit der beiderseitigen Kurvenstücke gibt die Mengenverteilung für die gleichzeitig vorhandenen größeren und kleineren Geschwindigkeiten an. Das Maximum ist durchweg nur sehr flach. Größere

1) Vgl. P. Lenard u. A. Becker, Kathodenstrahlen, III. Kap.

Geschwindigkeiten treten bis zu einem Grenzwert auf, und die zugehörige Elektronenzahl nimmt mit der Annäherung an letzteren rasch ab. Kleinere Geschwindigkeiten scheinen andrerseits bis zum Nullwert herab vertreten zu sein, und die zugehörige Elektronenzahl wächst mit abnehmender Geschwindigkeit.

Dieses neue Bild ist qualitativ dem oben gezeichneten älteren nicht unähnlich. Ein beachtenswerter Unterschied scheint nur in dem gehäuften Auftreten sehr langsamer Primärelektronen bei den geringen Strahlgeschwindigkeiten zu liegen. Man könnte dem vielleicht entgegenhalten, daß diese langsamen Elektronen den (meist photographischen) Geschwindigkeitsuntersuchungen an schnelleren Strahlen hätten entgangen sein können.

Bei quantitativer Betrachtung der Erscheinungen treten aber weitere Schwierigkeiten auf, die eine veränderte Deutung des Kurvenbildes nahelegen. Wenn nämlich das angedeutete Auftreten einer Inflexion mit dem Auftreten einer wahrscheinlichsten Geschwindigkeit im Falle schnellerer auffallender Strahlen in Parallele gestellt wird, so sollte man erwarten, daß die Inflexionsstelle mit abnehmender Strahlgeschwindigkeit, wachsendem Verlust entsprechend, in Fig. 4 nach größeren Werten der Abszisse sich verschiebt, was mit der Beobachtung nicht in Einklang ist. Auch der Absolutwert der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit würde, wenn man aus Bekanntem extrapoliert, meist kleiner zu erwarten sein.

Wollte man diese Extrapolation mit Hilfe der häufig benutzten Beziehung

$$V_0^2 - V_w^2 = b_w \cdot x$$

mittels des im Gebiet kleiner Strahlgeschwindigkeiten V_0 bis etwa 6500 Volt herab für Nickelfolien beobachteten ¹⁾ Konstantenwerts $b_w = 15,3 \cdot 10^5 \text{ K-Volt}^2/\text{cm}$ vornehmen, so würde man finden, daß die wahrscheinlichste Austrittsgeschwindigkeit V_w für die benutzte Dicke x der Nickelfolie bei $V_0 = 2500$ Volt Null werden und also bei kleineren V_0 -Werten überhaupt nicht mehr auftreten würde. Die Folie würde zwar zunächst immer noch für Primärstrahlen durchlässig sein, da auch geringere

1) O. Klemperer, Ztschr. f. Phys. 34. S. 532. 1925.

Geschwindigkeitsverluste vorkommen. Es würde aber für Strahlen unter 1700 Volt nach den Folgerungen aus der genannten Beobachtung keinerlei Durchlässigkeit mehr vorhanden sein.

Dies widerspricht nun zweifellos den gegenwärtigen Versuchen. Die benutzte Beziehung ist also offenbar auf kleinste Strahlgeschwindigkeiten nicht anwendbar; man müßte zum mindesten eine Abnahme des Zahlenfaktors b_w annehmen, wie dies auch schon vermutet worden ist.¹⁾

Nun läßt sich der Geschwindigkeitsverlust im bisher untersuchten Geschwindigkeitsgebiet, wie früher²⁾ gezeigt werden konnte, mindestens mit gleich guter Annäherung durch eine Beziehung darstellen, deren Anwendung auf sehr kleine Kathodenstrahlgeschwindigkeiten zur — abgesehen von den Absolutwerten — nahe gleichen Verlustkurve führt, wie sie für α -Strahlen bekannt ist, eine Aussage, die, soweit sie bisher an ihren Konsequenzen prüfbar war, sich durchaus bewährt hat.³⁾ Führt man mit ihrer Hilfe die erforderliche Extrapolation aus, so findet sich, daß die wahrscheinlichste Austrittsgeschwindigkeit erst bei 700-Voltstrahlen Null wird und die Durchlässigkeit der Nickelfolie bei etwa 400-Voltstrahlen zu verschwinden beginnt. Dies Ergebnis entspricht den Beobachtungen zweifellos weit besser als das zuvor erhaltene.

Man kann danach die beobachteten Kurven vielleicht so deuten, daß man nur die gleichmäßig mit stetig abnehmender Krümmung verlaufende Grundkurve den durchgehenden, verlangsamten Primärelektronen und die übergelagerte Inflexion einer besonderen Entstehungsursache zuschreibt. Man würde danach hier nur das nach den größten Austrittsgeschwindigkeiten hin gerichtete Endstück der allgemeinen Verlustkurve beobachten, welches anzeigt, daß die Wahrscheinlichkeit einer Austrittsgeschwindigkeit mit der Größe des zugehörigen Geschwindigkeitsverlusts gleichförmig anwächst. Der Umfang des Bereichs dieser Geschwindigkeiten nimmt mit abnehmender Strahlgeschwindigkeit ab, und es ist dann nach obigem zu erwarten, daß er auf Null herabgehen muß, wenn die Strahl-

1) O. Klemperer, a. a. O. S. 542.

2) A. Becker, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 4. 1917.

3) A. Becker, Ann. d. Phys. 81. S. 91. 1926.

geschwindigkeit so klein ist, daß die Folie für sie gänzlich undurchlässig wird, was nach obigem für etwa 400-Voltstrahlen der Fall sein sollte.

Zur Prüfung dieser Folgerung seien die beiden Kurven *e* und *f* der Fig. 5 betrachtet, welche für die in Rede stehende Nickelschicht die Beobachtungsergebnisse im Gebiet sehr kleiner Strahlgeschwindigkeiten verzeichnen. Der anfängliche Kurvenabfall wird hier ausschließlich durch wenige Sekundärstrahlen

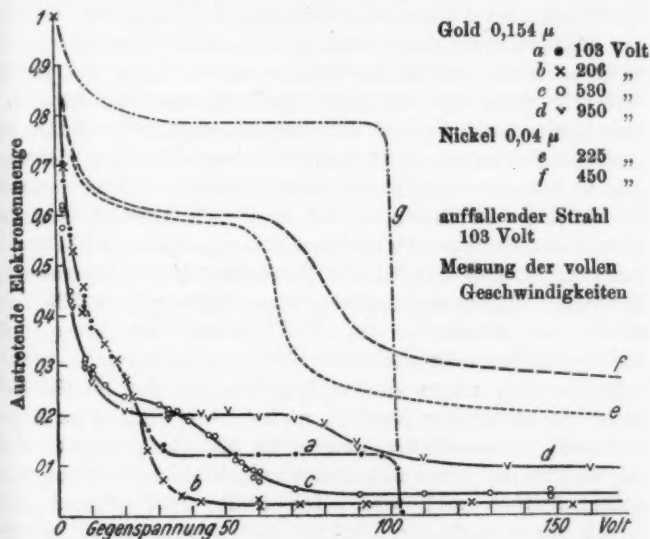


Fig. 5

und eine stark ausgeprägte Inflexion dargestellt, und ein Anzeichen für stark verlangsamte Primärstrahlen ist in der Tat nicht vorhanden. Zum Vergleich wird durch Kurve *g* die bei beiderseits offenem Zylinder K_1 meßbare Geschwindigkeitsverteilung der ursprünglichen Strahlung bei 103 Volt beschleunigender Spannung veranschaulicht.

Die beiden angeführten Kurven zeigen nun noch im Gegensatz zu den zuvor betrachteten der Fig. 4 die auffallende Erscheinung, daß sie mit wachsender Gegenspannung nahe horizontal weiterlaufen und erst dann rasch auf Null heruntergehen,

wenn die Gegenspannung nahe gleich der ursprünglichen Strahlgeschwindigkeit geworden ist. Es befinden sich also in diesen Fällen unter den austretenden Elektronen 20 bis 25 v. H. primäre, welche die Nickelschicht ohne wesentlichen Geschwindigkeitsverlust durchsetzt haben, und durch diese muß die geringe Sekundärstrahlung offenbar erzeugt worden sein.

Es liegt naturgemäß am nächsten, diese Erscheinung auf Löcher bzw. feine Poren in der Folie zurückzuführen. Zur Prüfung dieser Auffassung wurde vor und nach der Messung des 450-Voltstrahls eine Messung eines 1075-Voltstrahls durchgeführt. Es wurde für letzteren in beiden Fällen der gleiche und sehr nahe mit dem der 1050-Voltstrahlkurve der Fig. 4 übereinstimmende Verlauf der Geschwindigkeitsverteilung gefunden, welche unverzüglich hindurchtretende Strahlen höchstensfalls in kaum nachweisbaren Spuren anzeigte. Demgegenüber ist allerdings zu beachten, daß es für die Untersuchung der schnelleren Strahlen einer erheblich geringeren auffallenden Intensität bedarf als für die Untersuchung der langsameren Strahlen. Als bei der nachfolgenden Messung eines 325-Voltstrahls und schließlich des 225-Voltstrahls der Kurve *e* die auffallende Durchlässigkeit ohne Geschwindigkeitsverlust wieder gefunden war, zeigte sich in der Tat, daß der gleiche Fall auch mit schnelleren Strahlen nachweisbar wird, wenn deren Intensität auf mindestens das 10- bis 50 fache gesteigert wird, für welche die insgesamt austretende Elektronenmenge dann außerordentlich groß wird. Die Folie wurde danach zum Zweck einer optischen Prüfung aus dem Apparat herausgenommen. Es waren keinerlei Poren an ihr wahrzunehmen. Sie zeigte aber in ihrer Mitte an der Auftreffstelle der Strahlen einen durchsichtigeren Fleck von etwa 2 mm Durchmesser. Die Folie hatte also tatsächlich eine Veränderung erfahren, und diese Erscheinung wurde auch in anderen Fällen beobachtet, so oft Versuche mit sehr langsamen, große Intensitäten erfordernden Strahlen vorgenommen wurden. Da hierbei mehrmals eine Zerstörung der Folie eintrat, so ist kein Zweifel, daß durch die Bestrahlung — vielleicht unter Mitwirkung von Masseteilchen, die vom Glühdraht kommen — offenbar eine allmähliche Durchlöcherung auftreten kann, die sich zunächst der okularen Beobachtung entzieht. In allen Fällen aber, in denen

nicht ein deutlicher Anteil an verlustfrei hindurchtretenden Elektronen beobachtbar ist, sind solche feinsten Poren zum mindesten ohne Einfluß auf die Messungen, oder sie sind überhaupt nicht vorhanden. Die Frage, ob die Durchlässigkeit derselben nur von der relativen freien Flächengröße abhängt und ob sie unabhängig von der Strahlgeschwindigkeit und Strahlintensität ist, ist durch die gegenwärtigen Beobachtungen nicht zu beantworten.

Wir müssen uns nun näher den unseren Verteilungskurven übergelagerten Inflexionen zuwenden. Sie stellen nach aus Bekanntem möglich erscheinender Auffassung offenbar einen Fall *entweder selektiver Durchlässigkeit oder selektiver Neuerzeugung von Kathodenstrahlen im Innern des Mediums* dar, wenn sie nicht, ebenso wie dies bei der zuvor betrachteten Erscheinung zu vermuten war, auf *Struktureigenschaften* des Mediums zurückführbar sind.

Wenn die erste Deutung zuträfe, so wäre zu erwarten, daß den festgestellten Inflexionsorten bestimmte charakteristische Geschwindigkeiten zukämen. Dies entspricht aber nicht der Beobachtung.

Es zeigt sich vielmehr ein deutlicher Zusammenhang zwischen der Lage dieser Stellen und der ursprünglichen Strahlgeschwindigkeit (vgl. auch IV); je kleiner letztere ist, desto mehr rücken auch die Inflexionen nach kleineren Geschwindigkeiten hin. Dies würde verständlich sein, wenn man mit genügend intensiver Erregung hochfrequenter Eigenstrahlung seitens der Kathodenstrahlen im Innern des Mediums rechnete, die weniger der Absorption unterworfen wäre und die ihrerseits durch lichtelektrische Wirkung auf das Medium wieder neue Elektronen lieferte. Würde eine bestimmte Eigenstrahlung durch Kathodenstrahlen wachsender Geschwindigkeit erregt, so würde diese Erregung in entsprechend wachsende Schichttiefe vordringen, und es würden die auftretenden lichtelektrischen Elektronen im Medium immer kürzere Wege bis zum Austritt zurücklegen müssen, daher auch weniger dem Geschwindigkeitsverlust unterworfen sein. Außerdem wären von schnelleren Kathodenstrahlen von vornherein kürzerwellige Hochfrequenzstrahlen und von diesen wieder die schnelleren lichtelektrischen Elektronen zu erwarten. Es würde dieser

Auffassung auch die Beobachtung entsprechen, daß die Erscheinung bei den kleinsten Strahlgeschwindigkeiten, bei denen auch die größten Strahlintensitäten vorliegen, am ausgeprägtesten ist. Daß eine solche Auswahl in den austretenden Geschwindigkeiten bei den von einer bestrahlten Schicht beliebiger Dicke *rückkehrenden* Elektronen in bisherigen Versuchen ¹⁾ nicht bemerkbar geworden ist, dürfte kaum als Einwand gegen die hier vertretene Auffassung gelten können. Denn es liegt bei diesen Versuchen im Gegensatz zu den Absorptionsversuchen kaum ein Unterschied in der Größenordnung zwischen gemessener und einfallender Strahlung vor.

Da die selektive Geschwindigkeitsverteilung gerade dort am deutlichsten auftritt, wo sich auch ein Durchtritt nahe unverzügter Strahlen findet, so kann die dritte Deutungsmöglichkeit, welche die Erscheinung auf Schichtfehler zurückzuführen versucht, nicht unberücksichtigt gelassen werden. Es handelt sich dabei jetzt darum, das selektive Auftreten von verhältnismäßig eng um einen wahrscheinlichsten Wert gruppierten Elektronengeschwindigkeiten zu erklären, die erheblich kleiner sind als die Geschwindigkeit der auffallenden Strahlen. Dieser Geschwindigkeitsunterschied kann nur durch ein Zusammentreffen der einfallenden Strahlen mit Mediumsmolekülen erklärt werden. Das wäre durch Annahme von Poren in der Schicht nur möglich, wenn es sich um nicht in der ursprünglichen Strahlrichtung liegende, schiefe und vielleicht gewundene Kanäle handelte, durch welche die Elektronen infolge vielfacher Reflexion an den Wänden hindurchgelangen könnten. Diese Vorstellung wäre mit der Geringfügigkeit der Inflexionen bei größeren Strahlgeschwindigkeiten insofern in Einklang zu bringen, als die Möglichkeit der Strahlreflexion mit wachsender Geschwindigkeit, wie bekannt, rasch abnimmt. Es kann ihr aber andererseits entgegengehalten werden, daß die Reflexion langsamer Elektronen im allgemeinen ohne merklichen Geschwindigkeitsverlust erfolgt ²⁾; auch wäre die scharfe und gesetzmäßige Geschwindigkeitsauswahl durch derartige, doch jedenfalls vom Zufall abhängige Kanalbildung schwer ver-

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 253. 1925.

2) A. Becker, a. a. O. S. 272.

ständig, wie auch ein solches Kanalsystem an sich in den äußerst dünnen Schichten schwer vorstellbar ist. Falls überhaupt ein Struktureinfluß vorliegen sollte, so möchte man eher an Besonderheiten der molekularen Struktur denken, deren Kenntnis noch ausstände.

Da die durch die Inflexionen angedeuteten Elektronen jedenfalls nicht als unmittelbar die homogene Schicht durchdringende Primärstrahlen angesehen werden können, so wäre auch ihre besondere Berücksichtigung bei der Ermittlung der „Durchlässigkeit“ erforderlich. Das würde indes die Angaben der früheren Tab. 2 nicht merkbar verändern. Nur bei kleinsten Geschwindigkeiten beeinflussen sie die Ergebnisse im Sinne zu großer scheinbarer Durchlässigkeit.

Wir wenden uns im Anschluß hieran den Beobachtungen an anderen Metallschichten zu, die weitere Beiträge zu den behandelten Fragen liefern können.

IV. Messungen an Goldschichten

Es ist versucht worden, die Erscheinungen des Kathodenstrahldurchgangs an dünnen geschlagenen Goldhäutchen, die in größerer Auswahl zur Verfügung standen, weiter zu verfolgen. Es war leicht möglich, geeignete Flächenstücke auszusuchen, die gut lichtdurchlässig waren und bei der optischen Prüfung sich in der Dicke als völlig homogen und frei von nachweisbaren Löchern erwiesen. Zu den Versuchen wurden jeweils zwei solche Folien von je $0,077 \mu$ Dicke dicht übereinandergelegt, um etwa doch vorhandene Poren möglichst abzudecken. Die $0,154 \mu$ dicke Schicht war noch gut durchsichtig. Sie hielt den Versuchen lange Zeit ohne sichtliche Veränderung stand, wenn Quecksilberdampf sorgfältig ausgeschlossen blieb.

Da eine normale Durchlässigkeit dieser Schicht für langsame Strahlen bis mindestens 1000 Volt nicht anzunehmen war, wurden keine Absorptionsmessungen ausgeführt, sondern lediglich eingehende Geschwindigkeitsmessungen vorgenommen. Das Ergebnis zeigen die Kurven *a—d* der Fig. 5 für vier verschiedene Strahlgeschwindigkeiten. Die Kurven lassen in besonders übersichtlicher Form die Verhältnisse erkennen, die schon oben in Rede standen. Man bemerkt den anfänglich

starken Abfall, der auf eine stark ausgeprägte Sekundärstrahlung hinweist. An diesen schließt sich entweder unmittelbar oder im Anschluß an ein horizontales Kurvenstück eine durchweg deutlich ausgebildete Inflexion an. Schließlich läuft die Kurve in ein nahe horizontales Endstück aus, das erst dann scharf auf Null abfällt, wenn die Gegenspannung gleich der ursprünglich strahlbeschleunigenden geworden ist.

Eine Primärstrahlung mit kontinuierlich verteilten, verzögerten Geschwindigkeiten findet sich, wie bei der relativ großen Dicke zu erwarten war, nicht vor. Dagegen zeigt sich ein mit unverzügter Geschwindigkeit austretender Anteil und ein verhältnismäßig stark verzögerter selektiver Anteil.

Betrachten wir zunächst den letzteren, so bemerkt man, wie der Inflexionspunkt beim Übergang von den kleinsten zu den größten benutzten Strahlgeschwindigkeiten regelmäßig von etwa 22 über 25 und 50 Volt bis zu 90 Volt fortrückt, also einen Gang zeigt, wie er in qualitativ gleicher Weise schon für die Nickelschichten festgestellt werden konnte. Die Zahl der zugehörigen Elektronen nimmt mit wachsender Strahlgeschwindigkeit zuerst zu und dann wieder ab, wie dies auch für die Sekundärstrahlmenge in Übereinstimmung mit Bekanntem etwa zu beobachten ist. Den umgekehrten Gang zeigt die unverzüglich austretende Menge, die zunächst ab und dann wieder zunimmt. Es fällt hier besonders schwer, diese Erscheinungen durch grobe Strukturfehler der Schicht deuten zu wollen, wenn auch die Möglichkeit vielfacher Reflexionen zwischen den beiden Folien, falls jede von ihnen nicht völlig von Poren frei wäre, hier einzusehen wäre. Eine Prüfung der Schicht auf Gasdurchlässigkeit war nicht erfolgreich durchführbar, ohne sie dabei zu verletzen.

V. Messungen an Aluminiumschichten

Die Unsicherheit bezüglich der Struktur der Meßschicht ist bei Aluminium besonders groß, da lichtdurchlässige Schichten ohne leicht nachweisbare Löcher nicht verfügbar sind. Unter dickeren Schichten lassen sich zwar leicht solche auswählen, die sich sowohl bei optischer Prüfung als bei Prüfung auf Gasdurchlässigkeit als vollkommen porenfrei erweisen; eine Homogenität der Dicke ist aber nicht sehr einfach feststellbar

und überdies von vornherein als sehr unwahrscheinlich anzunehmen. Das Ergebnis der Durchlässigkeitsbeobachtung kann daher sehr verschiedenartig ausfallen je nach der Beschaffenheit der von den Strahlen getroffenen Stelle der benutzten Fläche.

Zu den Messungen dienten jeweils streng auf Lochfreiheit geprüfte Folien von 2,3, 3,1 und $4,3\ \mu$ Dicke, wie sie als Aluminiumfenster von Kathodenstrahlröhren in ausgesuchter Güte zur Verwendung kommen. Das Ergebnis häufiger Versuche mit verschiedenen Proben der genannten Dicken ist dies, daß in den meisten Fällen eine Durchlässigkeit im Geschwindigkeitsgebiet von 2—4500 Volt überhaupt nicht beobachtbar war, selbst wenn die auffallende Elektronenmenge das 10^9 fache derjenigen Menge betrug, die an der Rückseite noch gut nachweisbar gewesen wäre. In einigen Fällen konnte eine Durchlässigkeit festgestellt werden, deren Abhängigkeit von der Strahlggeschwindigkeit sehr ähnlich derjenigen war, die für die Nickelschichten gefunden und in Fig. 2 dargestellt worden war. Die Strahlen trafen in diesen Fällen offenbar auf besonders dünne Stellen der Folie auf.

Daß Aluminium in Dicken der hier benutzten Größe ganz allgemein eine besonders ausgeprägte Durchlässigkeit für langsame Kathodenstrahlen besitze, wie dies eine Arbeit von Hrn. Hartig¹⁾ nachzuweisen glaubt, trifft also zweifellos nicht zu. Die Angaben dieser Arbeit stimmen aber auch wenig mit den gegenwärtigen Erfahrungen in den eine Durchlässigkeit zeigenden Einzelfällen überein, so daß sie als erheblich durch Fehlerquellen beeinflusst anzusehen sind, was schon die Versuchsanordnung vermuten läßt, und wie dies auch schon von anderer Seite²⁾, allerdings ohne Beibringung positiver Ergebnisse zur Frage der Durchlässigkeit, nahegelegt worden ist.

An einer einzigen Probe einer Schicht der durchschnittlichen Dicke $4,3\ \mu$ konnte die auffallende Erscheinung einer stark *selektiven Durchlässigkeit* für ein engbegrenztes Geschwindigkeitsgebiet beobachtet werden. Sie trat erst bei sehr intensiver Bestrahlung der Folie, dann aber sehr ausgeprägt auf;

1) H. E. Hartig, Phys. Rev. 26. S. 221. 1925.

2) T. Kurtchatov u. K. Sinelnikov, Phys. Rev. 28. S. 367. 1926.

die austretende Elektronenzahl hatte dabei die Größenordnung von 10^{-8} der auffallenden, während 10^{-11} derselben noch gut meßbar war. Bei von 2 Volt an wachsender Strahlgeschwindigkeit war ein Austritt von Elektronen an der Rückseite von etwa 50 Volt an merkbar. Die Menge (bezogen auf gleiche auffallende Intensität) stieg bis etwa 100 Volt langsam, dann rascher an und hatte bei 160—180 Volt ein scharfes Maximum. Von hier fiel sie wieder rasch ab, um von etwa 300 Volt an fast gänzlich zu verschwinden und erst über 4000 Volt wieder allmählich merkbar zu werden. Wir haben also die eigenartige Erscheinung, daß die Folie sich als gut durchlässig erweist, wenn sie Strahlen von etwa 160 (120—250) Volt empfängt, während dies für langsamere und für schnellere Strahlen nicht der Fall ist. Die beobachteten Werte waren in ihrer Größe zwar etwas schwankend und die Lage des Maximums um 10—20 Volt verschieblich; qualitativ war die Erscheinung aber beliebig oft sehr deutlich reproduzierbar.

Um einen weiteren Einblick zu gewinnen, wurde eine Messung der *Geschwindigkeitsverteilung* der austretenden Elektronen für den Fall des Maximums (160-Voltstrahlen) ausgeführt. Es ergab sich eine schon bei kleinen Gegenspannungen rasch abfallende Verteilungskurve, die bei etwa 50 Volt die Abszissenachse erreichte. Es handelt sich hiernach also nicht etwa um eine ohne Verzögerung stattfindende bevorzugte Durchlässigkeit der auffallenden Strahlen, da es durchweg viel langsamere, aber offenbar nicht ausschließlich sekundäre Strahlen sind, welche die Folie verlassen.

Die Seltenheit der Erscheinung zeigt zweifellos an, daß sie eine bestimmte, zurzeit nicht näher bekannte Struktur des Mediums voraussetzt. Irgendeine Veränderung der Folie nach den Versuchen war nicht erkennbar. Selbst wenn man einen groben Schichtfehler verantwortlich machen wollte, wäre die Erscheinung auffallend genug, um ihr weiter nachzugehen.

Zusammenfassung

1. Es wird der Durchgang langsamer Kathodenstrahlen durch freie Metallschichten aus Nickel, Gold und Aluminium untersucht. Beobachtet wird sowohl die Anzahl als die Geschwindigkeitsverteilung der die Rückseite der Schichten ver-

lassenden Elektronen in ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der auffallenden Strahlen.

2. Das genauer untersuchte Geschwindigkeitsgebiet liegt zwischen 100 und 4500 Volt, in einzelnen Fällen geht es bis auf 2 Volt herab.

3. Die austretenden Elektronen zerfallen allgemein in 4 Gruppen:

a) Sekundärelektronen. Diese überwiegen in den meisten Fällen stark. Ihr relativer Anteil nimmt mit abnehmender Strahlgeschwindigkeit bis etwa 500 Volt herab stark zu, um danach wieder abzunehmen. Ihre wahrscheinlichste Geschwindigkeit beträgt, unabhängig von der Primärgeschwindigkeit, etwa 2 Volt, wie dies früher auch für die an der Eintrittsseite erzeugten Sekundärstrahlen nachgewiesen worden ist.

b) Primärelektronen mit kontinuierlich zwischen nahe Null und einem bestimmten Höchstwert verteilten Geschwindigkeiten. Es sind dies die mit mehr oder weniger großem Geschwindigkeitsverlust die Schicht durchsetzenden Elektronen. Sie fehlen, wenn die Schichtdicke so groß ist, daß alle Primärgeschwindigkeiten in ihr infolge Geschwindigkeitsverlusts aufgezehrt worden sind.

c) Elektronen eines bestimmt ausgewählten Geschwindigkeitsgebiets. Ihre Geschwindigkeit ist im allgemeinen kleiner als diejenige der auffallenden Strahlen, sie zeigt aber einen gewissen Zusammenhang mit ihr.

d) Unverzögerte Primärelektronen, die in Einzelfällen bei großer Primärintensität beobachtbar waren.

4. Die Durchlässigkeit einer Schicht nimmt im allgemeinen mit sinkender Strahlgeschwindigkeit stark ab, erreicht aber schließlich einen unteren Grenzwert. Wie weit derselbe nach kleinsten Geschwindigkeiten hin erhalten bleibt, ist noch unbekannt.

5. In Einzelfällen kann eine stark selektive scheinbare Durchlässigkeit für bestimmte Strahlgeschwindigkeiten auftreten, wobei die Schicht für langsamere und für schnellere Strahlen nahe völlig undurchdringlich sein kann. Die durchtretenden Strahlen sind dabei erheblich langsamer als die auffallenden.

6. Die Absorption der Metalle erscheint bei kleinen Geschwindigkeiten im Vergleich zu Luft beträchtlich geringer als massenproportional.

7. Der Geschwindigkeitsverlust langsamer Kathodenstrahlen scheint, soweit er quantitativ faßbar ist, nahe in gleicher Weise von der Geschwindigkeit abzuhängen wie derjenige der α -Strahlen.

8. Es werden eingehend die aus Bekanntem sich ergebenden Deutungsmöglichkeiten für die beobachteten selektiven Erscheinungen betrachtet. Eine endgültige Entscheidung ist zurzeit noch kaum möglich. Gewisse selektive Erscheinungen sind zweifellos an eine bestimmte Struktur des Mediums gebunden. Ob es sich dabei um molekulare oder gröbere Struktureigenschaften handelt, wird erst zu entscheiden sein, wenn es gelingt, auf Grund der vorliegenden mehr orientierenden Beobachtungen systematische Messungen an Schichten genau bekannter Struktur auszuführen.

Für die Gewährung der benötigten laufenden Mittel habe ich wiederum der Gesellschaft der Freunde der Universität Heidelberg bestens zu danken.

Heidelberg, Radiol. Institut u. Theor.-Physikal. Apparat.

(Eingegangen 14. Oktober 1927)

prob.
achs
Stör
trans
gefüh
Fall
Strö
gewi
Strö
unter
gleich
daß
schie
beide
besch
im V
über
Strö
Strö
paral
Strö
daher
Pois

1. 1

sei d

6. *Über dreidimensionale Störungen der
Poiseuilleschen Strömung;
von Theodor Sexl*

Kürzlich¹⁾ habe ich die exakten Ansätze des Stabilitätsproblems der Poiseuilleschen Strömung in Rohren im Falle achsensymmetrischer, in der Strömungsrichtung überlagerter Störungen derselben mitgeteilt und bis zur Aufstellung einer transzendenten Gleichung für die gesuchte Größe β durchgeführt. Diese transzendente Gleichung wird jetzt für den Fall großer αR gelöst und die Stabilität der Poiseuilleschen Strömung den achsensymmetrischen Störungen gegenüber nachgewiesen. Ferner wird das Verhalten der Poiseuilleschen Strömung gegenüber dreidimensionalen Störungen derselben untersucht. Es zeigt sich, daß die resultierende Differentialgleichung vierter Ordnung so außerordentlich kompliziert wird, daß man sich auf eine Herausarbeitung der wesentlichen Unterschiede den achsensymmetrischen Störungen gegenüber in den beiden Grenzfällen verschwindender und reibungsloser Strömung beschränken muß. Es ergibt sich, daß die wesentlichen Züge im Verhalten zwei- und dreidimensionalen Strömungen gegenüber sich ganz analog wiederfinden wie in dem Verhalten einer Strömung mit linearer Geschwindigkeitsverteilung und einer Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung zwischen parallelen Wänden. Eine Durchrechnung dieser letzteren Strömung, die bekanntlich bisher nicht gelungen ist, sollte daher auch die gewünschten Aufschlüsse über die eigentliche Poiseuillesche Strömung in Rohren geben können.

1. Stabilitätsbeweis der Poiseuilleschen Strömung gegenüber achsensymmetrischen Störungen

Unter Zugrundelegung von Zylinderkoordinaten r , φ , z sei die Geschwindigkeit in der φ -Richtung Null und alle sonst

1) Ann. d. Phys. 83. S. 835. 1927.

auf tretenden Größen von φ unabhängig. Führen wir die Stokessche Stromfunktion durch

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

ein und eliminieren aus den hydrodynamischen Grundgleichungen den Druck, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Delta \Psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi \\ - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \Delta \Psi = \frac{1}{R} \Delta \Delta \Psi, \end{aligned} \right.$$

wobei $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. (R = Reynoldssche Zahl)

Der Poiseuilleschen Strömung $W = 1 - r^2$ überlagern wir nun nach der Methode der kleinen Schwingungen eine achsensymmetrische Störung, gehen also mit dem Ansatz $\Psi = -\int r W dr + \psi$ in (4) ein. Vernachlässigen wir der Methode der kleinen Schwingungen gemäß die Quadrate und Produkte von ψ und seinen Ableitungen, so erhalten wir

$$(5a) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (1 - r^2) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \cdot \Delta \psi = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi.$$

Wird nun die kleine Störung nach Fourierscher Art in Partialschwingungen von der räumlichen Frequenz α , die als reell und nichtnegativ vorausgesetzt wird, zerlegt, so erhält man mit dem Ansatz

$$\psi = \varphi(r) \cdot e^{i(\beta t - \alpha x)}$$

aus (5a) die beiden gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} -i\alpha R \left(1 - r^2 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot f &= \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \alpha^2 f \\ \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \alpha^2 \varphi &= f. \end{aligned} \right.$$

Die Lösungen dieser beiden simultanen Differentialgleichungen müssen nun mit den Randbedingungen, daß φ/r und $\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}$ am Rohrumfange verschwinden und für $r=0$ keine Singularität auftreten darf, aufgesucht werden. $f_1(r)$ sei das ganze transzendente in Reihenform darstellbare Integral der

ersten der beiden Differentialgleichungen (7). Dann ergibt die Integration der zweiten der beiden Differentialgleichungen (7) nach der Methode der Variation der Konstanten unter Ausschluß einer Singularität für $r = 0$

$$\frac{q}{r} = c_1 \frac{\pi i}{2} \left\{ J_1(i\alpha r) \cdot \int_0^r H_1^{(1)}(i\alpha r) f_1(r) dr - H_1^{(1)}(i\alpha r) \cdot \int_0^r J_1(i\alpha r) f_1(r) dr \right\} + c_3 J_1(i\alpha r).$$

Die Randbedingungen am Rohrumfange liefern dann zwei homogene lineare Gleichungen und das Nullsetzen ihrer Determinante die gesuchte transzendente Gleichung für β :

$$(8) \quad \int_0^1 J_1(i\alpha r) f_1(r) dr = 0.$$

Es soll nun nachgewiesen werden, daß diese transzendente Gleichung im Falle großer αR , d. h. im Bereiche der asymptotischen Entwicklung der Partikularlösungen, nur durch β -Werte mit positiv imaginärem Bestandteil erfüllt werden kann. Dieser Nachweis gelingt bemerkenswerterweise ohne jegliche numerische Rechnungen. Zunächst muß eine Hilfsbetrachtung eingeschaltet werden.

Wir gehen von der ersten der Differentialgleichungen (7)

aus:

$$(7c) \quad \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \alpha^2 f = i\alpha R \left[\frac{\beta}{\alpha} - (1 - r^2) \right] \cdot f$$

und fordern als Randbedingungen das Verschwinden von f/r bzw. das von $\frac{1}{r} \frac{df}{dr}$ am Rohrumfange und beide Male Ausschluß einer Singularität für $r = 0$. Ist $f_1(r)$ das ganze transzendente in Reihenform darstellbare Integral von (7c), so lauten die beiden transzendenten Gleichungen im Falle unserer Randbedingungen:

$$(8b) \quad f_1(1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{1}{r} \frac{df_1(r)}{dr} \right|_{r=1} = 0.$$

Es soll nun aus der Differentialgleichung (7c) selbst heraus nachgewiesen werden, daß diese beiden transzendenten Gleichungen nur für β -Werte mit positiv imaginärem Bestandteil

erfüllt sein können. Hierzu machen wir (7c) durch Multiplikation mit r^{-1} selbstadjungiert: (eine Differentiation nach r werde mit einem Strich bezeichnet)

$$\left(\frac{f'}{r}\right)' - \frac{\alpha^2 f}{r} = i \alpha R \left[\frac{\beta}{\alpha} - (1 - r^2)\right] \cdot \frac{f}{r}.$$

Setzen wir nun $f = f_r + i f_i$, $\beta = \beta_r + i \beta_i$ und trennen die reellen und imaginären Glieder, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha R} \left(\frac{f'_r}{r}\right)' &= \frac{f_r}{r} \left(-\frac{\beta_i}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\alpha R}\right) - \frac{f_i}{r} \left[\frac{\beta_r}{\alpha} - (1 - r^2)\right] \\ \frac{1}{\alpha R} \left(\frac{f'_i}{r}\right)' &= \frac{f_r}{r} \left[\frac{\beta_r}{\alpha} - (1 - r^2)\right] + \frac{f_i}{r} \left(-\frac{\beta_i}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\alpha R}\right). \end{aligned}$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit f_r/r , die zweite mit f_i/r multipliziert, beide addiert und über den Rohrquerschnitt integriert, so folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha R} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{f_r}{r} \left(\frac{f'_r}{r}\right)' + \frac{f_i}{r} \left(\frac{f'_i}{r}\right)' \right] r dr d\varphi \\ &= \left(-\frac{\beta_i}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\alpha R}\right) \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{f_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{f_i}{r}\right)^2 \right] r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Formen wir das links stehende Integral nach dem Greenschen Satze um in¹⁾

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha R} \int \left[\frac{f_r}{r^2} \frac{\partial f_r}{\partial r} ds + \frac{f_i}{r^2} \frac{\partial f_i}{\partial r} ds \right] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha R} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{f'_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{f'_i}{r}\right)^2 \right] r dr d\varphi, \end{aligned}$$

so annulliert sich das an erster Stelle stehende Linienintegral längs des Rohrumfanges, da wir einerseits als Randbedingung das Verschwinden von f/r , andererseits das Verschwinden von $\frac{1}{r} \frac{df}{dr}$ am Rohrumfange gefordert haben. Wir haben also

1) Dies folgt aus dem Greenschen Satze:

$$\iint u \Delta v df + \iint \text{grad } u \cdot \text{grad } v \cdot df = \int u \frac{\partial v}{\partial n} ds,$$

wenn wir $u = \frac{f}{r^2}$ und $v = f$ setzen.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\alpha R} \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{f'_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{f'_\varphi}{r} \right)^2 \right] r \, dr \, d\varphi \\
 & = \left(-\frac{\beta_i}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\alpha R} \right) \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{f_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{f_\varphi}{r} \right)^2 \right] r \, dr \, d\varphi.
 \end{aligned}$$

Aus dem wesentlich positiven Charakter der beiden Integranden folgt somit, daß β_i positiv und zwar größer als α^2/R sein muß. Diese Bedingung erwies sich¹⁾ auch mit den strengen Grenzbedingungen des Verschwindens von $\frac{\varphi}{r}$ und $\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}$ am Rohrumfange für den Grenzfall verschwindender Strömung als erfüllt. Die Stabilität der Poiseuilleschen Strömung gegen achsensymmetrische Störungen liegt nun eben darin, daß diese Relation auch für beliebige αR erfüllt bleibt.

Um nun die transzendente Gleichung (8) für den Fall großer αR zu lösen, benötigen wir noch die asymptotische Darstellung von $f_1(r)$. Gehen wir zu diesem Zwecke unter Voraussetzung, daß α^2 von der Größenordnung 1 ist, mit dem Ansatz

$$f = e^g(r) = e^{(\alpha R)^\lambda g_0 + (\alpha R)^{\lambda-\mu} g_1 + \dots}$$

in die Differentialgleichung (7c)

$$f'' - \frac{1}{r} f' - \alpha^2 f = -i \alpha R (W - c) f$$

ein $(W = 1 - r^2, c = \frac{\beta}{\alpha})$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & [(\alpha R)^\lambda g_0'' + \dots + (\alpha R)^{2\lambda} g_0'^2 + 2(\alpha R)^{2\lambda-\mu} g_0' g_1' + \dots] \\
 & - \left[\frac{(\alpha R)^\lambda g_0' + \dots}{r} \right] - \alpha^2 = -i \alpha R (W - c).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst

$$(\alpha R)^{2\lambda} g_0'^2 = -i \alpha R (W - c),$$

daher

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad g_0 = \int \sqrt{-i(W - c)} \, dr.$$

Weiter ergibt sich

$$g_0'' + 2g_0' g_1' - \frac{g_0'}{r} = 0,$$

1) a. a. O. S. 842.

daher $g_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{r}{g_0}$. Wir erhalten somit die asymptotische Darstellung der Partikularintegrale in der Gestalt

$$\bar{f}_{1,2} = \frac{r^{1/2}}{(W-c)^{1/2}} \cdot e^{\pm \int_{r_0}^r \sqrt{-i\alpha R(W-c)} dr}$$

Das ganze transzendente im Nullpunkt endlichbleibende Integral $\frac{\bar{f}_1(r)}{r}$ von (7c) wird sich asymptotisch durch eine lineare Kombination der beiden asymptotischen Darstellungen von \bar{f}_1 und \bar{f}_2 darstellen. Die zweite der beiden transzendenten Gleichungen (8b) wird also asymptotisch lauten (C eine bestimmte Konstante):

$$|\bar{f}_1'|_{r=1} + C \cdot |\bar{f}_2'|_{r=1} = 0.$$

Führt man die angegebenen Differentiationen aus und vernachlässigt man noch Glieder von der Größenordnung $(\alpha R)^{-1/2}$, so findet man schließlich

$$e^{\frac{1}{2} \int_{r_0}^1 \sqrt{-i\alpha R(W-c)} dr} = +C,$$

welche Gleichung nach dem oben geführten Nachweis nur durch c -Werte mit positiv imaginärem Bestandteil befriedigt werden kann.

Nunmehr kehren wir zur transzendenten Gleichung (8) zurück:

$$\int_0^1 J_1(i\alpha r) f_1(r) dr = 0.$$

αR sei sehr groß. Ist dann erstens auch α sehr groß, so folgt direkt, da¹⁾ $J_1(i\alpha r) \sim i \cdot \frac{e^{i\alpha r}}{\sqrt{2\pi\alpha r}}$ wird, $f_1(1) = 0$, d. h. die erste der transzendenten Gleichungen (8b).

1) Z. B. Jahne-Emde, Funktionentafeln, Leipzig, B. G. Teubner, S. 100. 1909.

Ist andererseits α klein, so erhalten wir

$$\int_0^1 J_1(i\alpha r) \cdot \left\{ \frac{r^{1/2}}{(W-c)^{1/4}} e^{\int_{r_0}^r \sqrt{-i\alpha R(W-c)} dr} + C \cdot \frac{r^{1/2}}{(W-c)^{1/4}} \cdot e^{-\int_{r_0}^r \sqrt{-i\alpha R(W-c)} dr} \right\} dr = 0.$$

Die Integration ergibt bei Beschränkung auf Glieder höchster Größenordnung:

$$\frac{J_1(i\alpha)}{(-c)^{1/4}} \cdot \left\{ \frac{e^{\int_{r_0}^1 \sqrt{-i\alpha R(W-c)} dr}}{\sqrt{i\alpha R c}} + C \cdot \frac{e^{-\int_{r_0}^1 \sqrt{-i\alpha R(W-c)} dr}}{-\sqrt{i\alpha R c}} \right\} = 0,$$

oder

$$e^{\int_{r_0}^1 \sqrt{-i\alpha R(W-c)} dr} = + C,$$

d. h. die zweite der transzendenten Gleichungen (8b) in asymptotischer Form. Damit ist aber auch schon die Stabilität der Poiseuilleschen Strömung gegenüber achsensymmetrischen Störungen nachgewiesen.

Das Verhalten der Poiseuilleschen Strömung in Rohren gegenüber achsensymmetrischen Störungen ist also völlig analog dem der linearen Strömung zwischen parallelen Wänden. Die wesentlichen Züge sind kurz zusammengefaßt folgende: In mathematischer Hinsicht das Bemerkenswerteste ist die Zerspaltbarkeit des Eigenwertproblems der vollständigen Differentialgleichung vierter Ordnung in das zweier simultaner Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welcher Umstand die vollständige Beweisführung der Stabilität ermöglicht. In physikalischer Hinsicht zeigt sich, daß die Flüssigkeit bei kleinem αR^1) als Ganzes schwingt analog der Grundschwingung und den Oberschwingungen einer eingespannten Kreismembran. Bei größer werdendem αR werden offenbar diese Schwingungen in Richtung der Hauptströmung und zwar am stärksten in der Rohr-

1) a. a. O. S. 842.

achse immer mehr und mehr verzerrt, bis schließlich bei einem gewissen αR ein Zerreißen stattfindet. Die Störung rückt immer mehr in einzelne Schicht zusammen und artet schließlich in der Grenze reibungsloser Flüssigkeit¹⁾ in Wirbel aus, die auf eine unendlich dünne Schicht $r = \text{const.}$ konzentriert sind, während überall sonst im Rohr die Zusatzwirbelung $\zeta = \frac{1}{2r} \Delta \psi$ der Störung verschwindet ($\varphi'' - \frac{1}{r} \varphi' - \alpha^2 \varphi = 0$). Während alle Schwingungen für endliche αR gedämpft sind, überlagern sich im Grenzfall reibungsloser Flüssigkeit stationäre, d. h. weder gedämpfte noch angefachte, Schwingungen auf die Hauptströmung, die sich somit im indifferenten Gleichgewicht den Störungen gegenüber befindet. Natürlich darf bei Überlagerung dieser stationären Schwingungen die gesamte ausströmende Flüssigkeitsmenge sich nicht ändern, was auch tatsächlich der Fall ist, wie aus

$$\begin{aligned} \int_0^1 w \cdot 2\pi r dr &= -2\pi \int_0^1 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot r dr = 2\pi [\psi_1|_{r_0}^0 + 2\pi [\psi_2|_1^{r_0} \\ &= 2\pi [\psi_1(0) - \psi_1(r_0) + \psi_2(r_0) - \psi_2(1)] = 0 \end{aligned}$$

folgt, wenn ψ_1 die Stromfunktion im Intervall $0 \leq r \leq r_0$ und ψ_2 im Intervall $r_0 \leq r \leq 1$ bedeuten und $r = r_0$ die Schicht der nichtverschwindenden Zusatzringwirbelung, in der natürlich ψ (d. h. die radiale Geschwindigkeit) stetig sein muß, dagegen $\partial \psi / \partial r$ unstetig sein wird, d. h. eine Gleitung stattfindet.

2. Das Verhalten der Poiseuilleschen Strömung gegenüber dreidimensionalen Störungen

Von diesen Resultaten aus ergibt sich nun ein wichtiger Gesichtspunkt für die Stabilitätsfrage der Poiseuilleschen Strömung im Falle dreidimensionaler Störungen derselben und für die Stabilitätsfrage der Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung zwischen parallelen Wänden. Bekanntlich resultiert für Strömungen zwischen parallelen Wänden im Grenzfall reibungsloser Flüssigkeit durch Grenzübergang $\alpha R \rightarrow \infty$ die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\varphi'' - \alpha^2 \varphi)(w - c) - w'' \varphi = 0$$

1) a. a. O. S. 840.

mit den Randbedingungen, daß φ an beiden Wänden verschwinden muß. Diese Differentialgleichung besitzt nun im Falle linearer Hauptströmung $w = y$, $w'' = 0$ nur die singulären Lösungen $w = y = c$, im Falle einer Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung $w = 1 - y^2$ dagegen neben den singulären Lösungen $w = 1 - y^2 = c$ noch die von Heisenberg¹⁾ angegebene „Potentiallösung“ $\alpha = 0$, $c = 0$, $\varphi = w$, die als entartete Schwingung zu betrachten ist (einem Hin- und Herpendeln der Hauptströmung zwischen den parallelen Wänden entsprechend). Die Zusatzwirbelung der Störung ($\varphi'' - \alpha^2 \varphi$) ist über den ganzen Querschnitt konstant ($= -2$).

Andererseits erhält man für den Grenzfall ruhender Flüssigkeit zwischen parallelen Wänden die Differentialgleichung

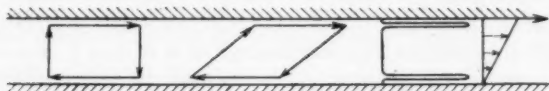
$$\left\{ \Delta - \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \cdot \Delta \psi = 0,$$

wobei $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (ν = kinematische Zähigkeit), mit den Randbedingungen, daß ψ und $\partial \psi / \partial y$ an den beiden Wänden verschwinden muß. Es ergeben sich dann die von Rayleigh diskutierten aperiodischen Schwingungen der Flüssigkeit als Ganzes und zwar das unsymmetrische Schwingungssystem der geraden Funktionen (einer ungeradzahligten Unterteilung der ganzen Flüssigkeit entsprechend) und das symmetrische Schwingungssystem der ungeraden Funktionen (einer geradzahligten Unterteilung der ganzen Flüssigkeit entsprechend). Ein Vergleich mit den achsensymmetrischen Schwingungen ruhender Flüssigkeit im Rohre lehrt, daß diese Schwingungen der Flüssigkeit zwischen parallelen Wänden sozusagen das unsymmetrische Schwingungssystem der geraden Funktionen mehr enthalten. Und dem entspricht, daß auch in der Grenze reibungsloser Flüssigkeit im Falle parabolischer Geschwindigkeitsverteilung neben den singulären Lösungen, die im Rohr allein vorhanden sind, noch die oben angegebene Potentiallösung auftritt.

Bekanntlich erfolgt nun der Übergang von dem Schwingungssystem ruhender Flüssigkeit zu dem Schwingungssystem der singulären Lösungen für reibungslose Flüssigkeit im Falle

1) W. Heisenberg, Ann. d. Phys. 74. S. 577. 1924.

linearer Hauptströmung zwischen parallelen Wänden ganz analog dem Übergang der Schwingungssysteme im Falle achsensymmetrischer Störungen der Poiseuilleschen Strömung und zwar nach folgendem Schema.¹⁾



Grundschwingung der linearen Strömung zwischen parallelen Wänden bei wachsendem αR

Die gezeichnete Grundschwingung der geraden Funktionen wird in Richtung der Hauptströmung immer mehr und mehr verzerrt, bis schließlich bei einem gewissen αR ein Zerreißen stattfindet. Die Störung rückt in eine einzelne Schicht zusammen und artet in der Grenze reibungsloser Flüssigkeit in Wirbel aus, die auf eine unendlich dünne Schicht $y = \text{const}$ konzentriert sind.

Es scheint nun klar, daß bei parabolischer Hauptströmung die stärkste Verzerrung in der Mitte (der größten Geschwindigkeit entsprechend) stattfinden wird. Die Grundschwingung der geraden Funktionen wird jedoch dieser verzerrenden Wirkung der Hauptströmung standzuhalten suchen und bei ihrem schließlich doch eintretenden Zerreißen möglicherweise Querschwingungen in der Grenzschicht erzeugen, die dann nach Prandtl²⁾ zur Instabilität führen. Eine solche Instabilität tatsächlich gefunden zu haben, wurde bekanntlich von Heisenberg³⁾ behauptet, doch können seine Rechnungen infolge der ungenügenden mathematischen Grundlagen nicht als beweisend angesehen werden.³⁾

Sollte dieser Gedankengang das Richtige treffen, so wäre damit gezeigt, daß die lineare Strömung zwischen parallelen Wänden *nur* als Analogon zu den achsensymmetrischen Stö-

1) L. Hopf, Ann. d. Phys. 43. S. 1. 1914.

2) L. Prandtl, Phys. Ztschr. 23. S. 19. 1922; O. Tietjens, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 5. S. 200. 1925.

3) W. Heisenberg, a. a. O., vgl. hierzu F. Noether, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 6. S. 232. 1926 und L. Hopf, Handb. d. Phys. 7. S. 133. 1927. Berlin, J. Springer.

ungen der Poiseuilleschen Strömung aufzufassen ist, während die Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung zwischen parallelen Wänden das Analogon für den Fall dreidimensionaler Störungen der eigentlichen Poiseuilleschen Strömung wäre.

Überlagert man aber auf die Poiseuillesche Strömung dreidimensionale Störungen, so wird die resultierende Differentialgleichung vierter Ordnung so außerordentlich kompliziert, daß eine Behandlung derselben gänzlich aussichtslos erscheint. Es kann daher im folgenden nur unsere Aufgabe sein, die erwähnte Analogie durch die Diskussion der beiden Grenzfälle ruhender und reibungsloser Flüssigkeit zu belegen.

In erster Linie ist daher der Nachweis erforderlich, daß im Falle dreidimensionaler Störungen der Poiseuilleschen Strömung nicht etwa schon eine Instabilität im Grenzfall reibungsloser Flüssigkeit vorliegt. Dies gelingt leicht in folgender Weise. Unter Zugrundelegung von Zylinderkoordinaten r, φ, z mit den entsprechenden Geschwindigkeiten u, v, w , nehmen, wenn man auf die Poiseuillesche Strömung $W=1-r^2$ dreidimensionale Störungen überlagert und ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt, die reibungslosen hydrodynamischen Grundgleichungen die Form an:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + W \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho r \partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial z}.\end{aligned}$$

Hierzu kommt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Werden nun aus diesen vier Gleichungen der Druck und die beiden Geschwindigkeiten v und w eliminiert, so erhält man mit dem Ansatz $u = u(r) \cdot e^{i(\beta t - \alpha z - r\varphi)}$ die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $u(r)$:

$$\begin{aligned}\frac{r^3}{r^3 + \alpha^2 r^2} u'' + \frac{r^2 (3\gamma^2 + \alpha^2 r^2)}{(\gamma^2 + \alpha^2 r^2)^2} u' \\ + \frac{r}{(\gamma^2 + \alpha^2 r^2)^2} (\gamma^2 - \gamma^4 - 2\gamma^2 \alpha^2 r^2 - \alpha^2 r^2 - \alpha^4 r^4) u \\ + \frac{4\gamma^2 r^2}{(\gamma^2 + \alpha^2 r^2)^2} \frac{1}{1 - r^2 - c} u = 0.\end{aligned}$$

Hierzu kommen als Randbedingungen, daß u für $r = 0$ endlich bleiben und am Rohrumfange verschwinden muß ($c = \frac{\beta}{\alpha}$). Wie man sieht, wurde die Differentialgleichung gleich in selbst-adjungierte Gestalt gebracht, was man ja bekanntlich immer durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor erreicht. Mit den Abkürzungen

$$p = \frac{r^2}{\gamma^2 + \alpha^2 r^2}, \quad q = \frac{r}{(\gamma^2 + \alpha^2 r^2)^2} (\gamma^2 - \gamma^4 - 2\gamma^2 \alpha^2 r^2 - \alpha^2 r^2 - \alpha^4 r^4)$$

$$\text{und } s = \frac{4\gamma^2 r^3}{(\gamma^2 + \alpha^2 r^2)^2},$$

wobei s im Intervall $0 \leq r \leq 1$ nicht negativ ist, lautet sie

$$p u'' + p' u' + q u + \frac{s}{1 - r^2 - c} u = 0.$$

Sind nun u_1 und u_2 die zu c_1 und c_2 gehörigen Eigenfunktionen, so ist also

$$(p u_1')' + q u_1 + \frac{s}{1 - r^2 - c_1} u_1 = 0,$$

$$(p u_2')' + q u_2 + \frac{s}{1 - r^2 - c_2} u_2 = 0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit u_2 , die zweite mit u_1 , subtrahiert und integriert schließlich von $r = 0$ bis $r = 1$, so wird

$$|p(u_1' u_2 - u_1 u_2')|_0^1 + (c_1 - c_2) \cdot \int_0^1 s \frac{u_1}{1 - r^2 - c_1} \frac{u_2}{1 - r^2 - c_2} dr = 0,$$

wovon der erste Term wegen der Grenzbedingungen am Rohrumfange und des Verschwindens von p für $r = 0$ gleich Null wird. Würde es nun komplexe Eigenwerte c geben, so müßte mit $c_1 = a + bi$ auch der konjugiert komplexe Eigenwert $c_2 = a - bi$ vorhanden sein. Die zugehörigen Eigenfunktionen seien $u_1 = u_r + i u_i$ und $u_2 = u_r - i u_i$. Es würde also folgen, da $c_1 - c_2 = 2bi \neq 0$,

$$\int_0^1 s \frac{u_r^2 + u_i^2}{(1 - r^2 - a)^2 + b^2} dr = 0,$$

was natürlich wegen des wesentlich positiven Charakters des Integranden unmöglich ist. Bis vor kurzem hätte man wohl aus diesem Ergebnis auf eine unbeschränkte Stabilität

der Poiseuilleschen Strömung geschlossen. Nach den Ausführungen Prandtls¹⁾ ist jedoch ein solcher Schluß erst bei Nichtexistenz reeller Potentiallösungen gerechtfertigt.

In der Grenze reibungsloser Flüssigkeit sind somit alle Eigenwerte c reell. Dagegen gelingt es in der Tat wegen des unbestimmten Charakters der Funktion q im Intervall $0 \leq r \leq 1$ nicht, durch eine ähnliche Schlußweise zu zeigen, daß etwa nur die reellen singulären Lösungen vorhanden sind. Tatsächlich findet man auch ohne weiteres aus der Anschauung, daß folgende entartete Schwingung als Möglichkeit vorhanden ist, einem Wertesystem $\beta = 0$, $\alpha = 0$, $\gamma = 1$, $u = 0$, $v = 0$, $w = W + c W' e^{-i\varphi} = 1 - r^2 - 2cr e^{-i\varphi}$ entsprechend. Diese Lösung genügt natürlich den hydrodynamischen Grundgleichungen, wie durch Differentiation von

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = \text{const. nach } r$$

folgt, andererseits wird aber auch die gesamte ausströmende Flüssigkeitsmenge durch Überlagerung dieser stationären, entarteten Schwingung nicht geändert, was man wie folgt einsieht:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} w r dr d\varphi = \int_0^1 \int_0^{2\pi} W r dr d\varphi + \int_0^1 \int_0^{2\pi} c W' e^{-i\varphi} r dr d\varphi = \pi \bar{W},$$

da ja das zweite Integral verschwindet. Die Wirbelverteilung der Hauptströmung wird durch die überlagerte Störung derart geändert, daß sich einerseits dem mit r proportionalen Ringwirbel der Hauptströmung ein Ringwirbel $c \cos \varphi$, andererseits ein Radialwirbel $c \sin \varphi$ überlagert. Daß die angegebene Lösung eine Gleitung an den Rohrwänden ergibt, kann nicht stören, da es sich um eine reibungslose Flüssigkeit handelt. Diese Schwingung, die offenbar einem Hin- und Herpendeln der Poiseuilleschen Strömung im Rohre entspricht, ist also das vollkommene Analogon der Heisenbergschen Potentiallösung für die Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung zwischen parallelen Wänden.

Wenden wir uns nun dem Grenzfall ruhender Flüssigkeit zu, so interessieren wir uns unter Voraussetzung kleiner α ,

1) L. Prandtl, a. a. O.

d. h. großer Wellenlänge der Störung in der Strömungsrichtung, für die Stromlinien in Querschnitten senkrecht zur Strömungsrichtung. In erster Annäherung können wir die Strömung in diesen Querschnitten als durch w unbeeinflusst betrachten und die Stokessche Stromfunktion durch

$$u = \frac{\partial \psi}{r \partial \varphi}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

eingeführen. Dann erhalten wir, indem wir Quadrate und Produkte von ψ und seinen Ableitungen vernachlässigen, die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung¹⁾

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \cdot \Delta \psi = 0,$$

wobei $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. Der Ansatz $\psi = \chi(r) \cdot e^{i(\beta t - r\varphi)}$ ergibt, da $\beta = in$ (n positiv, da es sich um Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage handelt) sein muß,

$$\left\{ \Delta + \frac{n}{r} \right\} \cdot \Delta \chi = 0.$$

Hierzu kommen als Randbedingungen, daß χ/r und $d\chi/dr$ am Rohrumfange verschwinden müssen und für $r = 0$ keine Singularität auftreten darf. Da die beiden Operatoren $\Delta + \frac{n}{r}$ und Δ offenbar kommutativ sind, erhalten wir die allgemeine Lösung additiv aus den Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$\Delta \chi_1 \equiv \chi_1'' + \frac{1}{r} \chi_1' - \frac{\gamma^2}{r^2} \chi_1 = 0,$$

$$\Delta \chi_2 + \frac{n}{r} \chi_2 \equiv \chi_2'' + \frac{1}{r} \chi_2' + \left(\frac{n}{r} - \frac{\gamma^2}{r^2} \right) \chi_2 = 0.$$

Die allgemeinen Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen sind nun:

$$\chi_1 = c r^\gamma + d r^{-\gamma},$$

$$\chi_2 = e J_\gamma \left(\sqrt{\frac{n}{r}} r \right) + f H_\gamma^{(1)} \left(\sqrt{\frac{n}{r}} r \right).$$

1) Ann. d. Phys. 83. S. 845. 1927.

Die Bedingung des Endlichbleibens von χ/r für $r = 0$ ergibt $d = f = 0$. Also hat man spezieller:

$$\chi = c r^\gamma + e J_\gamma \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} r \right).$$

Die Randbedingungen am Rohrumfange ($r = a$) fordern schließlich das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} a^{\gamma-1} & \frac{1}{a} J_\gamma \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} a \right) \\ \gamma a^{\gamma-1} & -\frac{\gamma}{a} J_\gamma \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} a \right) + \sqrt{\frac{n}{\nu}} J_{\gamma-1} \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} a \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Die transzendente Gleichung für n lautet daher

$$\frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{n}{\nu}} \cdot a J_{\gamma-1} \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} a \right) = J_\gamma \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} a \right).$$

Für den einfachsten Fall $\gamma = 1$ wird diese zu

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{\nu}} \cdot a J_0 \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} a \right) = J_1 \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} a \right),$$

deren kleinste Wurzel $a \sqrt{\frac{n}{\nu}} = 5,136$ ist. Die Stromfunktion wird allgemein

$$\psi = \left[r^\gamma - \frac{a^\gamma}{J_\gamma \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} a \right)} J_\gamma \left(\sqrt{\frac{n}{\nu}} r \right) \right] \cdot e^{-i\gamma\varphi - nt}$$

und entspricht im einfachsten Falle $\gamma = 1$ und $a \sqrt{\frac{n}{\nu}} = 5,136$ aperiodischen Schwingungen der ganzen Flüssigkeit nach folgendem Schema:



Die gezeichnete Schwingung ist aber offenbar gerade das gesuchte Analogon zur Grundschwingung der geraden Funktionen zwischen parallelen Wänden, die einem vertikalen axialen Schnitt entspricht.

Wir haben also gesehen, daß sich die wesentlichen unterscheidenden Züge im Verhalten der Poiseuilleschen Strömung gegenüber achsensymmetrischen und gegenüber dreidimensionalen Störungen wiederfinden im Verhalten einer Strömung mit linearer und einer Strömung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung zwischen parallelen Wänden gegenüber zweidimensionalen, in der Strömungsrichtung überlagerten Störungen.

Sollte daher eine einwandfreie Durchrechnung dieser letzteren Strömung in Zukunft gelingen, so werden damit wohl auch alle wesentlichen Eigenschaften der Poiseuilleschen Strömung in Rohren wiedergegeben werden.

Wien, im September 1927.

(Eingegangen 21. Oktober 1927)

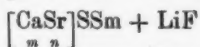
**7. Über das Spektrum der CaSrS-Samarium-Mischphosphore;
von M. Travniček**

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Graz, Nr. 57)

Inhaltsübersicht: 1. Versuchsanordnung. — 2. Die Ausgangsmaterialien. — 3. Darstellung der Mischphosphore auf trockenem Wege. — 4. Beobachtungsverfahren. — 5. Darstellung der Mischphosphore auf nassem Wege. — 6. Spektrale Beobachtungen. — 7. Alterungserscheinungen. — Beziehungen zwischen Schwingungszahl und Gitterkonstante. — 8. Bleisulfat-Samariumphosphore. — 9. Ergebnisse.

1. Versuchsanordnung

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde die Herstellung von Grundmetall-Mischphosphoren der Zusammensetzung



beschrieben, welche an Intensität und Dauer des Nachleuchtens die einfachen Samariumphosphore übertreffen. Dabei hat es sich ergeben, daß die Emissionsspektren dieser Mischphosphore zwar dem Aussehen nach ein den einfachen Phosphoren im wesentlichen gleichartiges Spektrum zeigen, dessen Lage jedoch mit der prozentuellen Zusammensetzung der Grundmasse sich ändert; es konnte nämlich bei allen Linien²⁾ (Banden) dieser Spektren eine mehr oder weniger große Verschiebung gegenüber den Spektren der einfachen Phosphore beobachtet werden und es wurde schon damals die Vermutung ausgesprochen, daß sich die Schwingungszahlen der Linien nicht linear mit der prozentuellen Zusammensetzung der Grundsubstanz änderten. Zweck dieser Arbeit ist es vor allem, soweit die mir zur Ver-

1) M. Travniček, Ann. d. Phys. 79. S. 237. 1926.

2) Wie bei den einfachen Phosphoren werden auch die Emissionsbanden der Mischphosphore als „Linien“ bezeichnet werden, obgleich manche bis zu 50 ÅE. breit sind.

fügung stehenden Mittel es gestatten, möglichst genau die Wellenlänge dieser Phosphoreszenzlinien bei Zimmertemperatur zu bestimmen und deren Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Grundsubstanz des Phosphors festzustellen. Obwohl für die Mehrzahl dieser Phosphoreszenzlinien eine große Dispersion ungünstig ist, weil dann infolge der Lichtschwäche manche Linien überhaupt nicht mehr gesehen werden können, andere wieder nur als etwa 20–60 Å breite verwaschene Lichtflecke erscheinen, deren Maxima nur ungenau meßbar sind, so ist sie doch andererseits wieder von Vorteil, weil dabei die Intensität des kontinuierlichen Untergrundes geschwächt wird. Da die Versuche, das Spektrum mit Pinachromblau sensibilisierten Platten photographisch aufzunehmen, trotz vielstündiger Exposition an der außerordentlichen Lichtschwäche scheiterten, mußte subjektiv beobachtet werden.

Zur Zerlegung des Phosphorlichtes diente ein mittelgroßes Konkavgitter von Rowland, welches 14438 Furchen pro engl. Zoll enthält und einen Krümmungsradius von 6 Fuß besitzt. Die Dispersion ist dabei so groß, daß im Spektrum 2. Ordnung, mit welchem immer gearbeitet wurde, einer Ångströmeinheit etwas mehr als 0,2 mm entspricht. Das Gitter und der an Stelle der photographischen Platte befindliche Beobachtungsrahmen waren fest auf einem Tisch montiert, der Spalt beweglich. Da immer nur ein kleiner Spektralbereich, entweder die rote oder grüne Teilbande zu betrachten war und es dabei nur geringe Lageänderungen festzustellen galt, konnte die ganze Aufstellung während einer vollen Beobachtungsreihe unverändert belassen werden. Am Beobachtungsrahmen befand sich eine wagerecht verschiebbare Leiste mit einer darauf senkrecht stehenden feinen Nadel, die als Ablesemarke diente, da mit dunkeladaptiertem Auge beobachtet werden mußte. Durch horizontales Verschieben der Leiste konnte die Nadel¹⁾ in die Mitte des reellen Bildes der zu messenden Linie gebracht werden, wobei eine beweglich angebrachte Lupe genaues Einstellen gestattete. Auf der Leiste befand sich ein leicht auswechselbarer Kartonstreifen aufgespannt, in gleicher Höhe

1) Zur Messung besonders lichtschwacher Linien war es zweckmäßig, die Nadelspitze mit einem schwach nachleuchtenden Phosphor zu bestreichen, weil sonst die Nadel nicht gesehen werden konnte.

damit, am Rahmen befestigt, war ein senkrecht verschiebbarer federnder Druckknopf mit einer Nadelspitze. Bei Betätigung des Druckknopfes entstand durch Eindringen der Spitze ein feines Loch im Karton. So war es möglich, die Nadel durch wagerechtes Verschieben der Leiste auf alle Linien einer Teilbande einzustellen und deren Lage mittels des Druckknopfes auf dem Kartonstreifen zu markieren. Durch jeweilig kleine senkrechte Verschiebungen des Knopfes konnte die Markierung derselben Linien am gleichen Streifen sehr oft (über 20 mal) untereinander vorgenommen werden. Nach Beendigung einer Beobachtungsserie wurde der Streifen ausgetauscht und bei Tageslicht ausgemessen. Zum Vergleich dienten die Linien einer Quecksilberdampf Lampe, deren Licht mittels eines Spiegels auf den Spalt fiel. Die Phosphoreszenzbanden, sowie das Vergleichsspektrum wurden immer mit derselben Spaltbreite beobachtet und zwar je nach der Lichtstärke der Linien gewöhnlich zwischen 0,2—0,4 mm.

Die Erregung des vom Spalt ungefähr 20 cm entfernten Phosphors geschah durch das Licht einer mit 16 Ampere brennenden Gleichstromkohlenbogenlampe. Die Anordnung war dieselbe wie bei den früheren Untersuchungen mit Benützung von Blau-Uviolglas, Lichtsammeltrichter und Wassertrög. Der Raum zwischen Spalt, Gitter und Rahmen war mit schwarzem Karton von der Umgebung abgeschlossen, so daß kein störender Lichtschein zum Gitter gelangte. Sehr oft erwies es sich vorteilhaft, vor den Spalt ein Lichtfilter¹⁾ (Rapid-Filtergelb der Farbwerke Höchst a. M.) zu setzen, um auch jede Spur von blauem Licht (3. Ordnung) abzuhalten.

2. Die Ausgangsmaterialien

Um ein quantitativ genau bestimmtes Mengenverhältnis bei Herstellung der Mischphosphore zu erzielen, mußten die verwendeten Erdalkalien vorerst auf ihre Reinheit und ihren Gehalt an Calcium bzw. Strontium sorgfältig untersucht werden.

Das Calciumoxyd wurde durch langdauerndes, heftiges Glühen von chemisch gereinigtem, aus Laaser-Marmor gewonnenem Calciumcarbonat erhalten, war vollkommen magne-

1) Hrn. Prof. Hofrat Dr. K. Rosenberg sei für die freundliche Überlassung des Farbstoffes auch an dieser Stelle bestens gedankt.

sium- und strontiumfrei und entsprach seinem Gewichte nach der chemischen Formel. Das Strontiumoxyd, bezogen als „Strontium oxydatum puriss. siccum“, bestand der Hauptsache nach aus Strontiumhydrat $\text{SrO} + \text{H}_2\text{O}$ und einigen Prozenten Strontiumcarbonat SrCO_3 , nebst Spuren von CaO , so daß ein Gramm des verwendeten Strontiumpräparates 0,810 Gramm reines SrO enthielt.

Vor der Analyse mußte eine größere Menge der zur Verwendung bestimmten Erdalkalioxyde fein zerrieben, tüchtig durchgeschüttelt und vermengt werden, damit möglichste Sicherheit gegeben war, daß jede Teilprobe der Masse die nämliche Zusammensetzung hatte. Die Gehaltsbestimmung an Calcium und Strontium der betreffenden Präparate erfolgte auf zweierlei Weise: einmal durch heftiges anhaltendes Glühen, um die flüchtigen Bestandteile (H_2O und CO_2) auszutreiben und Wägung des verbliebenen Rückstandes, — das andere Mal durch Fällung der in Salzsäure gelösten Substanz mit Ammoniak und Ammoniumcarbonat in der Wärme, Erhitzen des gewaschenen Niederschlages bis zur dunklen Rotglut, Befeuchten des Ganzen mit einigen Tropfen Wasser, Zugabe von etwas gepulvertem Ammoniumcarbonat und nochmaliges langsames Erhitzen, diesmal aber nur auf etwa 300°C , um Wasser und den Überschuß von Ammoniumcarbonat zu entfernen. Beide Verfahren ergaben fast völlig identische Werte.

3. Darstellung der Mischphosphore auf trockenem Wege

Die Herstellung der Mischphosphore geschah zunächst auf eine seinerzeit beschriebene Art durch Verreibung der festen feinpulverisierten Substanzen in der Reibschale. Die auf diese Weise gebildeten Phosphore werden als Mischphosphore der Serie I bezeichnet.

Bei allen diesen und im folgenden untersuchten Samarium-Mischphosphoren wurde das Mengenverhältnis in Molprozenten ausgedrückt. In den Phosphorformeln kam dies derart zum Ausdruck, daß vor den unter den Symbolen der Grundmasse stehenden Verhältniszahlen „Mol“ gesetzt wurde. Diese Zahlen geben somit übersichtlich nebst dem Gewichte auch die relative Atom- bzw. Molekülanzahl der einzelnen Komponenten an. Es wurden Phosphore mit stufenweiser Änderung der Zusammen-

setzung von 10 zu 10, manchmal auch von 5 zu 5 Molproz. erzeugt.

4. Beobachtungsverfahren

Zur Beobachtung der spektralen Verschiebung eignet sich am besten die scharfe rote Hauptlinie¹⁾, welche einerseits die größte Intensität und Schärfe hat, andererseits die größte Verschiebung zeigt (fast 23 Å). Zur Bestimmung der Wellenlänge wurde an jeder Linie eine Reihe von Beobachtungen (meist 15 oder mehr) gemacht, aus all diesen Messungen das Mittel gebildet und dabei eine Meßgenauigkeit mit einer maximalen Abweichung von $\pm 0,3$ ÅE. erreicht. Die so ermittelten Werte der Wellenlänge der roten Hauptlinie sind in Tab. 1 zusammengestellt und der wahrscheinlichste Gang der Linienverschiebung ist mit der molprozentuellen Zusammensetzung aus der Kurve I, Fig. 1 zu entnehmen. Wie man sieht, verschiebt sich die Lage der Linie mit zunehmendem Calciumgehalt nach längeren Wellen, jedoch zeigen sich dabei bedeutende Unregelmäßigkeiten, die nicht durch Fehler in der Wellenlängenbestimmung erklärt werden können. — Da auch Phosphore, die mit genau denselben Gewichtsmengen und unter ganz gleichen Bedingungen (Glühdauer, Temperatur, Zusatz) hergestellt wurden, im Emissionsspektrum große Wellenlängendifferenzen zeigten, so wurde geschlossen, daß der Grund dieser Unstimmigkeit in einer unvollständigen chemischen Umsetzung der beteiligten Stoffe liegen müsse. Dies wird verständlich, wenn wir uns die Herstellungsbedingungen vergegenwärtigen. — Die beiden verwendeten Erdalkalipräparate CaO und $\text{SrO} + \text{H}_2\text{O}$ zeigen strukturelle Verschiedenheiten. Während das CaO aus harten Körnern besteht und diese Beschaffenheit auch in feinstgemahlenem Zustande und bei hoher Temperatur immer beibehält, schmilzt das Strontiumoxydhydrat bereits bei Rotglut und wird schon unterhalb der Siedetemperatur des Schwefels unter Entweichung von Wasserdampf quantitativ zu Strontiumsulfid und Strontiumsulfat umgesetzt.

Beachtet man, daß der Vorgang bei der Erzeugung z. B. eines reinen CaS -Phosphors so stattfindet, daß die harten

1) In der früheren Arbeit als Hauptlinie 3 der Teilgruppe $a-b$ bezeichnet.

Tabelle 1

Nr.	Zusammensetzung der Mischphosphore der Serie I	Ca Mol-%	Lage der scharfen roten Hauptlinie (Mittelwert) ÅE.	Anzahl der Beobach- tungen	Größte Ab- weichung vom Mittelwert: ÅE.
159	Ca S Sm + LiF 0,08 (30)	100	6058,6	56	+ 2,2 - 1,7
361	[CaSr] _{Mol 19:1} S Sm + LiF 0,08 (30)	95	6057,8	17	+ 1,4 - 0,4
363	" 9:1 " " "	90	6056,9	20	+ 1,5 - 2,4
332	" 9:1 " " "	90	6055,9	48	+ 4,4 - 2,4
328	" 4:1 " " "	80	6055,2	26	+ 1,5 - 1,9
334	" 3:1 " " "	75	6055,9	16	+ 2,4 - 2,4
345	" 7:3 " " "	70	6055,0	23	+ 1,9 - 2,4
329	" 3:2 " " "	60	6053,4	24	+ 1,5 - 1,5
346	" 11:9 " " "	55	6051,8	20	+ 2,4 - 2,4
343	" 11:9 " " "	55	6053,6	21	+ 1,9 - 1,9
323	" 1:1 " " "	50	6050,7	22	+ 3,6 - 3,2
342	" 2:3 " " "	40	6049,9	21	+ 1,9 - 1,5
341	" 3:7 " " "	30	6046,1	21	+ 2,9 - 7,2
350	" 1:3 " " "	25	6043,4	48	+ 6,8 - 4,4
325	" 1:4 " " "	20	6042,8	25	+ 3,4 - 3,4
344	" 3:17 " " "	15	6041,5	20	+ 2,4 - 1,0
360	" 1:9 " " "	10	6041,1	19	+ 3,4 - 2,9
335	" 1:19 " " "	5	6037,9	17	+ 3,0 - 5,0
245	Sr S Sm + LiF 0,08 (30)	0	6036,8	50	+ 1,7 - 1,7

CaO -Körnchen mit dem Schwefel ziemlich rasch bis gegen 900°C erhitzt werden, so wird es erklärlich, daß nur ein Teil der Stoffe miteinander in Reaktion treten können. Es wird sich nämlich jedes Kalkkörnchen mit einer Schichte aus einem Gemisch von CaS und CaSO_4 überziehen und dadurch ein Fortschreiten der Reaktion ins Innere erschweren, während

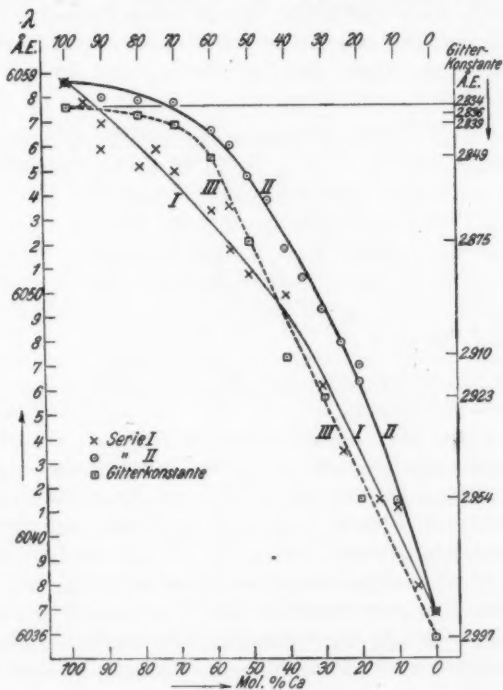


Fig. 1

der übrige Schwefel schon bei Erreichung seines Siedepunktes als Dampf entweicht. Berücksichtigt man weiter, daß bei beginnender Rotglut der mit dem Erdalkalioxyd zusammen verriebene Zusatz, — hier LiF , — zu schmelzen beginnt, also erst, nachdem gewöhnlich kein freier Schwefel mehr vorhanden ist, dieser dann die einzelnen Körnchen als glasartigen Schmelzfluß wie mit einer Schutzhülle umschließt, so wird es ver-

ständig, daß der Phosphor nunmehr gegen weitere chemische Einflüsse bedeutend widerstandsfähiger ist als das reine Sulfid. Sicherlich wird im geschmolzenen Zusatz etwas CaS und CaO gelöst werden, deshalb zeigen die so dargestellten CaSSm-Phosphore mit UV.-Licht erregt, neben dem Phosphoreszenzspektrum des CaSSm auch die Linien des CaOSm-Phosphors¹⁾ und ist es auch erklärlich, warum eine Trennung des CaO durch Behandlung mit Wasser sich nicht durchführen läßt²⁾, da ja zuerst die Hülle aus CaS, CaSO₄ und Zusatz entfernt werden müßte.

Aus dem Vorhergegangenen ergibt sich, daß der Gehalt dieser Phosphore an CaS in erster Linie von der Korngröße und der dadurch bedingten freien Oberfläche des CaO abhängig ist. Nur sehr langdauernde Einwirkung von Schwefeldampf könnte infolge des Diffusionsvermögens quantitativen chemischen Umsatz bewirken; ebenso förderlich ist mehrmaliges Zerreiben und erneutes Glühen mit Schwefel, sowie allerfeinste Zerteilung des CaO.

Die Mischphosphore der Serie I wiesen daher niemals jene Zusammensetzung auf, die sich aus den Gewichtsmengen der einzelnen Bestandteile errechnen lassen, sie enthielten immer etwas weniger CaS, da ja im Phosphor noch freies CaO vorhanden ist. Da nur das an den oberflächlichen Schichten der Calciumoxydkörnchen gebildete CaS mit dem Strontiumsulfid in Kontakt treten kann, die Menge des CaS aber von der unkontrollierbaren Korngröße des verwendeten CaO und von der schwer zu bemessenden Zeitdauer der Schwefeldampfeinwirkung abhängt, nicht zum geringsten auch die Löslichkeit des Strontium- und Calciumsulfids im Zusatz eine Rolle spielen mag, so ist eine genaue Reproduktion dieser Mischphosphore nicht möglich und erklärt dies den ungleichförmigen Gang der Verschiebung des Spektrums mit der Phosphorzusammensetzung. Wie es sich aus dem weiteren ergibt, wurden diese Schwierigkeiten behoben durch das folgende Darstellungsverfahren.

1) R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 75. S. 22, 561. 1924.

2) R. Stadler, Ann. d. Phys. 80. S. 774. 1926.

5. Darstellung der Mischphosphore auf nassem Wege

Die bestimmte Gewichtsmenge CaO wurde gelöscht, mit Wasser zu einer dünnflüssigen Kalkmilch angerührt, diese dann mit der entsprechenden wäßrigen Lösung Strontiumhydroxyd versetzt und unter beständigem Umrühren zur Trockne verdampft. Nun wurde die Masse mit Schwefel, Zusatz und Samariumlösung in der Reibschale verrieben und genau so behandelt, wie es bei der Herstellung der früheren Phosphore geschehen war. Die solcher Art dargestellten Phosphore werden im folgenden als Mischphosphore der Serie II bezeichnet. Der wesentliche Unterschied gegenüber der früheren Darstellungsmethode besteht also darin, daß der Kalk nunmehr zu Calciumhydroxyd umgewandelt als Suspension im hochdispersen Zustande mit der Lösung des Strontiumhydroxyds in Mischung gebracht und beim Eindampfen durch Rühren für eine ausgiebige Feinzerteilung und gleichmäßig homogene Beschaffenheit der entstehenden festen Phasen gesorgt wird.

Die Phosphore der Serie II wurden auf gleiche Art untersucht wie die früheren und es ergab sich dabei, daß sie bei Anwendung dieser Darstellungsweise gut reproduzierbar waren.

6. Spektrale Beobachtungen

Bei den Phosphorspektren der Serie II stehen die Wellenlängen mit der molprozentigen Zusammensetzung im kontinuierlich-regelmäßigen Zusammenhang, wie es für die rote scharfe Hauptlinie¹⁾ aus Tab. 2 und der Verschiebungskurve II in Fig. 1 ersichtlich ist. Hier sind die Abweichungen der beobachteten Werte von der Kurve II in Fig. 1 nur klein und bewegen sich im Bereiche der möglichen Beobachtungsfehler. Diese Kurve zeigt uns die Wirkung der Grundmetalle auf die Emission. Ersetzt man in einem einfachen CaSSm-Phosphor nach und nach Ca-Atome durch Sr-Atome, so ist anfänglich deren Einfluß auf den Emissionsvorgang gering (flacher Verlauf der Kurve), bis von etwa 42 Proz. Sr an eine rasche Verschiebung (steiler Abfall der Kurve) nach kürzeren Wellenlängen einsetzt.

1) Die anderen Linien, soweit ich sie messen konnte, zeigen nur kleine Abweichung vom Gang der roten scharfen Hauptlinie, wenn die Ordinatenteilung und die jeweilige Totalverschiebung der Wellenlängen auf der Abzissenachse gleich lang aufgetragen wurden.

Tabelle 2

Nr.	Zusammensetzung der Mischphosphore der Serie II	Ca Mol-%	Lage der scharf. roten Hauptlinie (Mittelwert) ÅE.	Anzahl der Beobach- tungen	Größte Ab- weichung vom Mittelwert: ÅE.
159	Ca S Sm + LiF 0,08 (30)	100	6058,6	56	+ 2,2 - 1,7
382	[CaSr] S Sm + LiF Mol 9:1 0,08 (30)	90	6058,0	30	+ 1,0 - 1,4
377	" 4:1 " " "	80	6057,9	19	+ 1,0 - 1,0
376	" 7:3 " " "	70	6057,8	16	+ 1,0 - 1,5
372	" 3:2 " " "	60	6056,6	18	+ 1,9 - 1,4
375	" 11:9 " " "	55	6056,0	16	+ 1,9 - 2,9
373	" 1:1 " " "	50	6054,8	17	+ 2,9 - 3,4
370	" 9:11 " " "	45	6053,8	28	+ 3,4 - 2,9
374	" 2:3 " " "	40	6051,8	43	+ 1,4 - 2,4
381	" 7:13 " " "	35	6050,6	19	+ 1,9 - 2,4
371	" 3:7 " " "	30	6049,3	14	+ 2,9 - 1,9
389	" 1:3 " " "	25	6047,9	22	+ 2,9 - 4,8
391	" 1:4 " " "	20	6047,0	12	+ 4,8 - 2,9
378	" 1:4 " " "	20	6046,3	21	+ 4,4 - 2,9
383	" 1:9 " " "	10	6041,4	7	+ 2,9 - 1,2
243	Sr S Sm + LiF 0,08 (39)	0	6036,8	50	+ 1,7 - 1,7

Mit der Verschiebung ändert sich auch die Linienbreite, besonders stark von etwa 42 Proz. Sr an, um in der Nähe von 100 Proz. Sr wieder ihr normales Aussehen zu bekommen. Gleichzeitig tritt im Gebiete der starken Verbreiterung auch

ein Diffuswerden der Linien ein; bei einigen Phosphoren scheint auch eine Andeutung eines schwachen Nebenmaximums damit verbunden zu sein, doch war dies wegen der Lichtschwäche nicht messend zu erfassen.

Die Ursache der plötzlichen Linienverbreiterung liegt wohl darin, daß bei der regellosen Verteilung der Moleküle nicht alle Emissionszentren die beiden Komponenten Ca und Sr im genau gleichen Verhältnis enthalten können, sondern es wird das Zusammenkommen der entsprechenden Molekelanzahl den Wahrscheinlichkeitsgesetzen unterworfen sein. Alle Linien der Samariummischphosphore sind deshalb an und für sich immer etwas breiter als die der einfachen Phosphore, besonders auffallend ist die Verbreiterung bei über 42 Molproz. Strontium deshalb, weil in diesem Gebiete schon geringe Unterschiede im Verhältnis der beiden Komponenten relativ große Verschiebungen des Spektrums verursachen, was eben in dem steilen Verlauf dieses Teiles der Kurve zum Ausdruck kommt. Zwischen 0 und 42 Molproz. Strontium, also im flachen Teil der Verschiebungskurve, werden auch beträchtliche Konzentrationsänderungen nur wenig bemerkbar, weshalb in diesem Gebiete die Linienbreite fast unverändert erhalten bleibt.

Die breite der roten scharfen Hauptlinie im reinen Ca-oder SrSSm -Phosphor beträgt bei kleinster Spaltöffnung (0,2 mm) etwa 9–10 ÅE., erreicht aber bei Mischphosphoren mit Sr-Überschuß mehr als das Doppelte. Gemessen wurde durch Einstellung der Nadel auf die Mitte jener oft nicht scharf definierten Stellen, bei welchen der Intensitätsabfall vom breiten Linienmaximum zum diffusen Untergrund am stärksten zu sein schien.

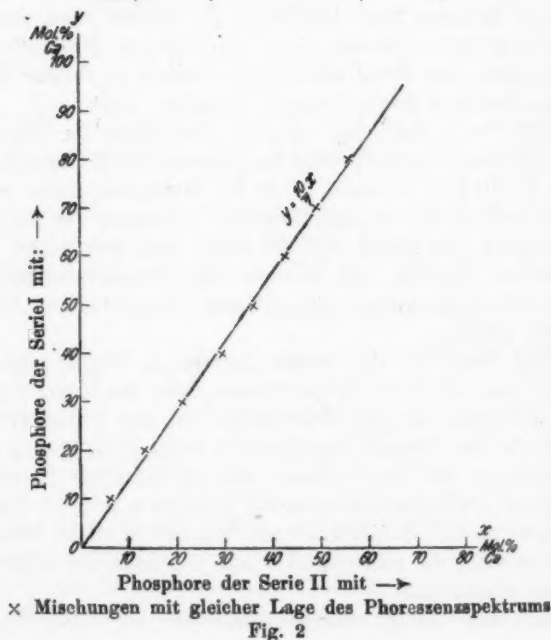
Ein Vergleich der beiden Kurven in Fig. 1 zeigt, daß alle Punkte der Kurve II zur rechten Seite der Kurve I liegen, und daß kein einziges Meßergebnis bei den Phosphoren der Serie I in den Bereich der Kurve II fällt. Dies steht in Übereinstimmung mit dem früheren, wonach bei allen Phosphoren der Serie I weniger Calciumsulfid gebildet wurde, so daß eine geringere Anzahl CaS -Molekel mit dem SrS in solche Beziehung getreten sind, die einen Einfluß auf die Lage der Emissionsbanden ermöglichte.

Um den Ausfall wirksamer Ca-Atome recht sinnfällig vor

Augen zu führen, wurde die Wirksamkeit des Calciums in den Mischphosphoren der Serie I mit dem der Serie II verglichen, woraus zu entnehmen ist, wieviel Ca in den Phosphoren der Serie I genau so wirksam sind als in den Phosphoren der Serie II. Dies ist aus der Tab. 3 zu ersehen und in Fig. 2

Tabelle 3

Lage der scharfen roten Hauptlinie AE.	Erscheint im Mischphosphor der	
	Serie I	Serie II
	bei Mol-% Ca	
6057,5	90	70
6046,0	80	56
6055,5	70	49,2
6052,9	60	42,8
6051,1	50	36,0
6049,2	40	29,5
6046,6	30	21,2
6045,4	20	13,4
6040,0	10	6,5



graphisch dargestellt. Es wird dabei die begründete Voraussetzung gemacht¹⁾, daß in den Mischphosphoren der Serie II alle Ca- und Sr-Atome ihrem berechneten Mengenverhältnisse nach auf die Phosphoremission einflußübend wirken. Die notwendigen Mischungsverhältnisse liegen alle auf einer Geraden, für welche die Gleichung $y = \frac{10}{7}x$ sehr gut stimmt. Dies besagt, daß in den Phosphoren der Serie I drei Zehntel der Ca-Atome unwirksam sind. Die einzelnen Abweichungen können als Folge einer gewissen Willkürlichkeit bei Festlegung der Kurve I in Fig. 1 gedeutet werden.

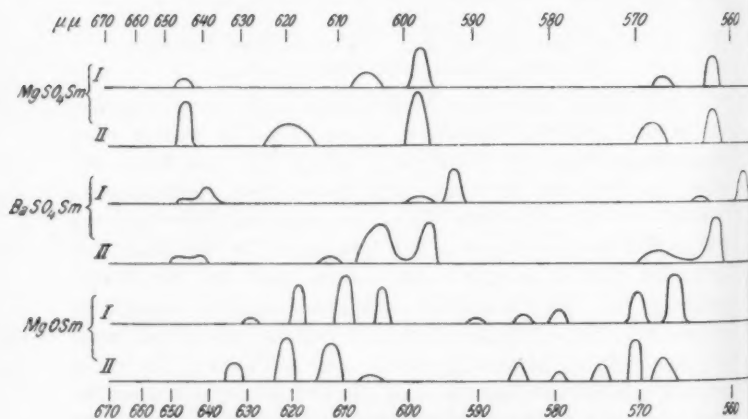
7. Alterungserscheinungen. — Beziehungen zwischen Schwingungszahl und Gitterkonstante

Alle bisher mitgeteilten Wellenlängenbestimmungen wurden an frisch bereiteten Phosphoren ausgeführt. Es wurden etwa vier Monate nach der Herstellung bei einigen Phosphoren mit über 40 Proz. Sr nochmals Linienmessungen vorgenommen, welche bei allen Spektren eine eben merkbare Verschiebung gegen Rot zu ergaben, ohne daß vorerst hierfür eine Erklärung gefunden werden konnte. Nun zeigte sich bei der Nachprüfung auf die Lumineszenzfähigkeit einiger Phosphore (MgSO_4Sm , BaSO_4Sm und MgOSm), welche vor etwas mehr als einem Jahre hergestellt waren, eine auffallende Änderung im Phosphoreszenzspektrum. Da die Untersuchungen hierüber erst begonnen haben, möge vorerst nur Fig. 3 die Unterschiede einiger Phosphoreszenzspektren zwischen alten und neuen Präparaten anzeigen. Wie man sieht, erreichen die Verschiebungen oft beträchtliche Werte, dabei ändern sich die Intensitäten zum Teil sehr stark, so daß manche Linien verschwunden, andere wieder neu aufgetreten zu sein scheinen. Ebenso auffallend sind die Veränderungen in bezug auf Breite und Schärfe der Linien.

Da z. B. der BaSO_4Sm -Phosphor sicherlich rein kristalline Struktur besitzt (er wurde durch Fällung auf nassem Wege gewonnen) und die Kristallstruktur der Mischphosphore im

1) Die Mischphosphore der Serie II zeigen im UV.-Licht keine CaOSm -Banden, sind daher CaO frei. (R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 75. 1924.)

hiesigen Institut¹⁾ auf röntgenographischem Wege einwandfrei festgestellt wurde, war es naheliegend, auch die spektrale Verschiebung bei den Mischphosphoren auf eine Alterungserscheinung zurückzuführen, möglicherweise verursacht durch Spannungsausgleiche innerhalb des instabilen Kristallgitters im Wirkungsbereich des Samariumatoms, welche so lange anhält, bis durch eine möglichst regelmäßige Atomverteilung in der Grundsubstanz (eventuell mit Zusatz) das innerkristalline Gleichgewicht erreicht wird. Da die Phosphore bei der Darstellung immer rasch gekühlt werden, sind solche Gitterstörungen in



I: Spektrum des frisch bereiteten Phosphors
II: Spektrum desselben Phosphors nach einem Jahr

Fig. 3

der Nähe der gitterfremden Einlagerung (des Samariums) sehr wohl zu erwarten.

Ob nun diese Alterungserscheinungen nur eine Folge von Gitterstörungen der allernächsten Umgebung des Samariumatoms sind oder ob dieselben von einer Änderung der Gitterkonstante im ganzen Mischkristall bedingt werden, wäre durch Vergleiche röntgenographischer Aufnahmen an frischen und alten Präparaten festzustellen, da im ersteren Falle Unter-

1) E. Rumpf, Ann. d. Phys. 84. S. 313. 1927.

schiede im Diagramm wegen der relativ geringfügigen Menge der gestörten Zonen kaum bemerkbar sein dürften.

In Fig. 1 ist als Kurve III der Gang der Gitterkonstante der Mischkristalle in den CaSrSSm-Phosphoren eingezeichnet, die ein auffallendes Parallelgehen mit den Schwingungszahlen aufweist und den bestimmenden Einfluß der Gitterkonstante des Grundmaterials auf die Lage der Emissionsspektren darlegt. Es scheint daher jede Änderung der Gitterkonstante eine entsprechende Verschiebung der Emissionslinien zu bedingen, weshalb wir auch dort, wo eine Verschiebung der Spektren beobachtet wird, auf entsprechende damit gleichzeitig einhergehende Änderungen der Gitterkonstante zu schließen berechtigt sein dürften.

8. Bleisulfat-Sm-Phosphore

Der vermutete Einfluß, den die Gitterkonstante auf die Lage des Phosphoreszenzspektrums ausübt, hat mich dazu geführt, Bleisulfat als Grundmaterial für Phosphore zu verwenden, weil dieses mit Strontiumsulfat, dessen Eignung hierfür bereits bekannt war¹⁾, isomorph ist und die Ionenradien von Pb^{++} (1,32 Å) und Sr^{++} (1,27 Å) sich voneinander nur um 0,05 ÅE unterscheiden. (Demgemäß differiert auch das Achsenverhältnis beider Kristalle sehr wenig: 0,779:1:1,280 beim SrSO_4 und 0,785:1:1,289 beim PbSO_4 .)

Die relativ gute Phosphoreszenzfähigkeit der auf naßkaltem Wege durch Fällung einer mit Samarium verunreinigten Strontiumsalzlösung mit Schwefelsäure hergestellten Phosphore wurde von mir früher übersehen, weil deren Dauererregungsverteilung ganz im Gebiete sehr kurzer Wellenlängen liegt. Ein nach dieser Methode aus Bleiacetat-(Bleizucker-)lösung erzeugter PbSO_4 -Sm-Phosphor stellt ein kristallines Pulver dar, welches im Blaulicht gute Fluoreszenz, aber erst bei Erregung mit dem Lichte einer Quarz-Quecksilberdampf Lampe Phosphoreszenz zeigt. Wird nun dieses solcherart gewonnene Pulver mit etwas LiF (etwa 0,01 g auf 1 g PbSO_4) und Spuren eines Samariumsalzes geglüht, so entstehen zartrotliche krümelige Körper, die erregt, prächtig orangerot mit Int. 7 nachleuchten, nach etwa 40 Minuten auf Int. 2 gesunken sind und nach mehreren Wochen

1) M. Travniček, a. a. O.

noch beim Erhitzen hell aufleuchten, wobei das zerlegte Phosphoreszenzlicht ein Spektrum gibt, welches sich von dem eines SrSO_4Sm -Phosphors bisher nicht unterscheiden ließ, wie es eben bei der großen Ähnlichkeit der Gitterkonstanten erwartet wurde. Glas-UV.-Licht erregt zur Fluoreszenz, erst direktes Licht der Quecksilberlampe bewirkt Phosphoreszenz. Durch Druck scheinen diese PbSO_4Sm -Phosphore schwer zerstörbar zu sein, da heftiges Verreiben in einer Achatschale die Intensität des Phosphoreszenzlichtes nur wenig schwächte.

Dieses Ergebnis spricht sehr dafür, daß Kristalle mit nahezu gleichen Gitterkonstanten auch fast gleich beschaffene amikroskopische Hohlräume enthalten, in denen eventuell eingelagerte gitterfremde Partikel derselben Art bei vorhandener Phosphoreszenzfähigkeit auch gleichen Emissionsmöglichkeiten unterworfen zu sein scheinen. Für das Vorhandensein solcher ultramikroskopischer Hohlräume in kristallinen und amorphen Phosphoren sprechen eine große Anzahl von Beobachtungen bei Herstellung der verschiedensten Phosphorpräparate, ferner auch die Erscheinungen bei der Druckzerstörung.¹⁾ Für die Realkristalle im besonderen wird von A. Smekal auf Grund seiner Untersuchungen das Bestehen von kleinsten Hohlräumen (Poren, Lockerstellen) in Kristallen überzeugend vertreten.²⁾

9. Ergebnisse

1. Es wurde festgestellt, daß die Verschiebung der roten Hauptbande des Phosphoreszenzspektrums mit der Zusammensetzung der CaSrSSm -Phosphore kontinuierlich und nicht sprunghaft sich ändert, wie es zu erwarten wäre, wenn das Phosphorzentrum eine bestimmte chemische Verbindung bilden würde. *Man kann daher schließen, daß neben der Bindung des Samariumatoms mit dem Gattungsatom bzw. Gattungsradikal auch noch andre Einflüsse von seiten der Grundsubstanz auf das Samariumatom vorhanden sein müssen, die sich als eine Volumwirkung, also als der summarische Einfluß aller umgebenden Atome der Grundsubstanz auf die Emission des Samariums bzw. dessen Verbindung*

1) H. Kuppenheim, Ann. d. Phys. 70. S. 113. 1923.

2) A. Smekal, Ztschr. f. techn. Phys. 7. Jahrg. Nr. 11. 1926. Dortselbst sind auch weitere Literaturangaben zu finden.

äußert und dadurch die kontinuierliche Verschiebung des Spektrums bewirkt.

2. Aus dem Parallelgehen des Ganges der Gitterkonstante des Grundmaterials mit der Schwingungszahl der Emissionslinien läßt sich schließen, daß die kristalline Beschaffenheit der Grundsubstanz von maßgebendem Einfluß auf die Emission der Phosphorzentren ist und zwar in dem Sinne, daß eine Vergrößerung der Gitterkonstante auch eine Vergrößerung der Schwingungszahl der Emissionslinien bedingt.

3. Die frisch bereiteten Mischphosphore sind instabile Gebilde, welche spontan auftretende Alterungserscheinungen zeigen.

4. Wir können nunmehr aus der Lage der Emissionslinien auf Grund der Verschiebungskurve unmittelbar auf die Mischungsverhältnisse der beiden Komponenten der Grundsubstanz in den Zentren der CaSrSSm -Mischphosphore schließen, eine Aussage, die wir auf Grund chemischer Untersuchungen nie zu machen imstande wären, weil sich u. a. die Trennung der beiden Erdalkalisulfide quantitativ nicht durchführen läßt.

5. Es ist nun möglich gemacht, durch die Beobachtung der Lage der Emissionsspektren an Samariummischphosphoren den Verlauf der chemischen Bindung des Schwefels zwischen Ca und Sr zu verfolgen, wenn bei Herstellung dieser Phosphore eine geringere Quantität Schwefel benutzt wird, als zur vollen chemischen Umsetzung der Alkalioxyde notwendig ist.

Hrn. Professor H. Benndorf spreche ich für seine mannigfachen wertvollen Ratschläge und vielfachen Unterstützungen meinen besten Dank aus. Gleichfalls danke ich auch Hrn. Professor Dr. E. Rumpf, der mir bei Aufstellung der Apparatur oftmals geholfen hat.

(Eingegangen 26. Oktober 1927)

**8. Bemerkung zur vorstehenden Arbeit
des Hrn. M. Travniček;
von Erich Rumpf**

Ich habe einen nach der „Serie I“ dargestellten CaS–SrS–Samarium-Mischphosphor mit möglichst großer Abweichung der ausgesandten Wellenlänge vom normalen Kurvenverlauf nach der Debye-Scherrer-Methode untersucht.¹⁾ Es war ein Präparat, das nach seiner Darstellung 75 Proz. Ca und 25 Proz. Sr enthalten und demnach eine Wellenlänge von 6057,8 AE. ausstrahlen sollte; Hr. Travniček stellte aber eine Wellenlänge von 6055,2 AE. fest (Diff. 2,6 AE.). Das Debye-Scherrer-Diagramm ließ auf eine Konzentration von 44 Proz. Sr schließen, welcher eine Wellenlänge von 6056,0 AE. entspricht (Diff. 0,8 AE.). Außerdem zeigte das Diagramm kräftige Spuren von verhältnismäßig großen Kristallkörnern, denen die Gitterkonstante von CaO zukommt. Weil die restliche Differenz von 0,8 AE. sehr wohl auf Beobachtungsfehler zurückzuführen ist, so erscheinen die aus chemischen Gründen gefolgerten Überlegungen des Hrn. Travniček über die tatsächliche Zusammensetzung der nach Serie I dargestellten Mischphosphore durch die Röntgenaufnahme gestützt.

1) Vgl. meine in diesen Annalen (84. S. 313. 1927) jüngst erschienene Arbeit.

S-
der
ach
rat,
ont-
us-
nge
rer-
en,
Diff.
von
ter-
von
ist,
per-
en-
rch

er-

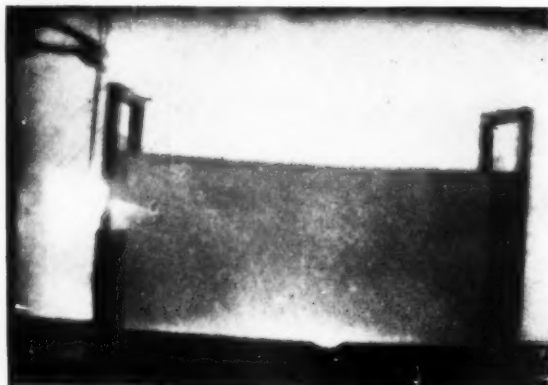


Bild 1

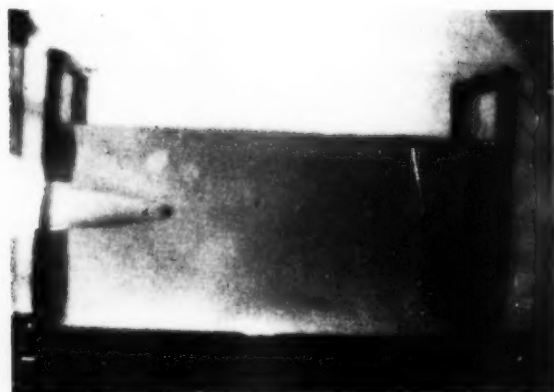


Bild 2

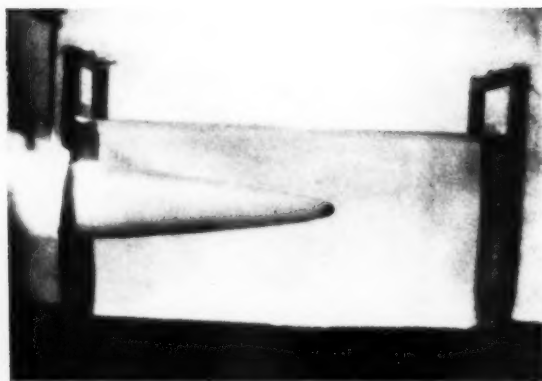


Bild 3

Anmerkung: Die Pfeile in Bild 5 und 6 weisen auf den augenblicklichen Kugelort hin.



Bild 4



Bild 7

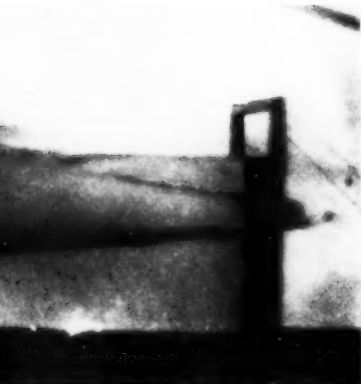


Bild 5

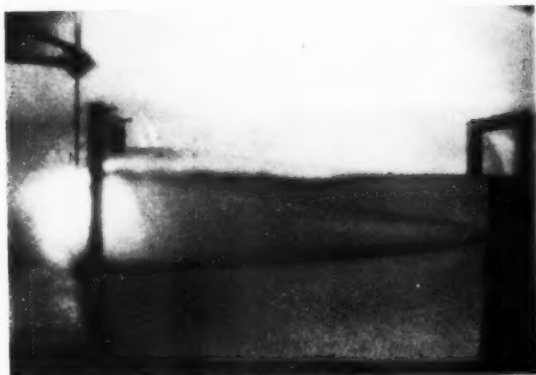


Bild 8



Bild 6



Bild 9



Fig. 2.

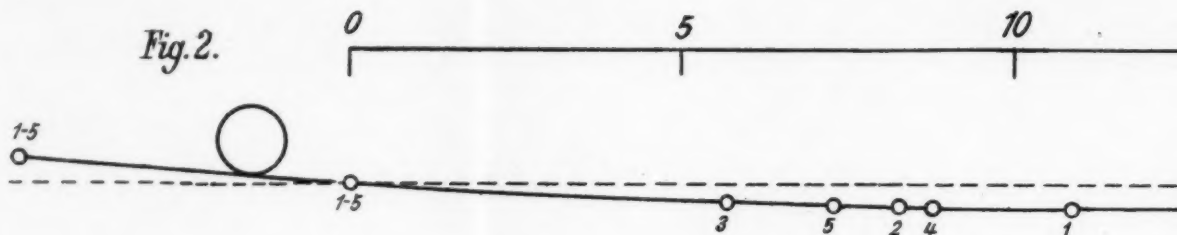


Fig. 6.

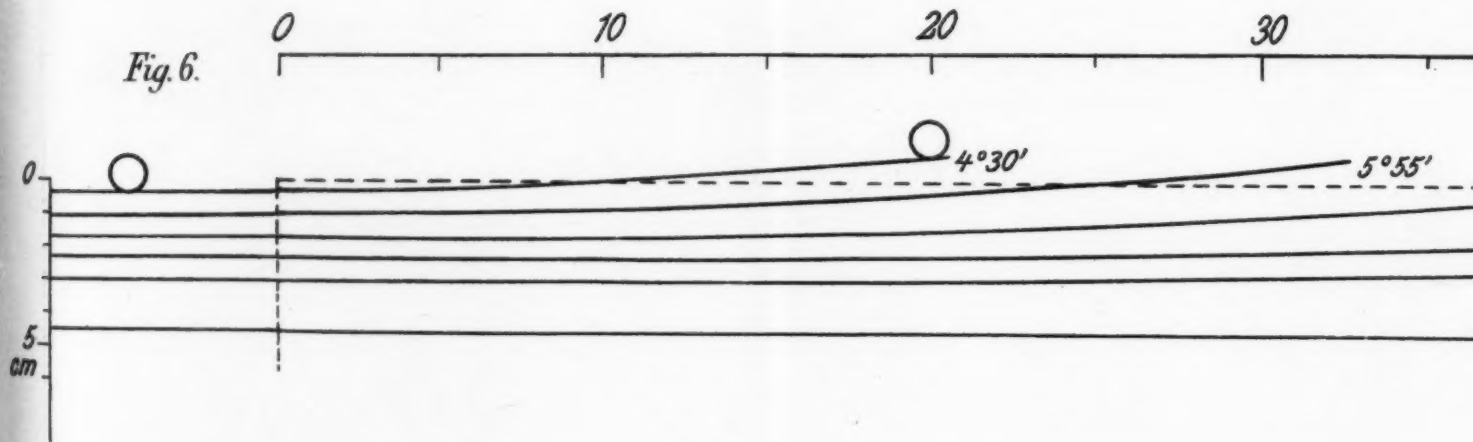
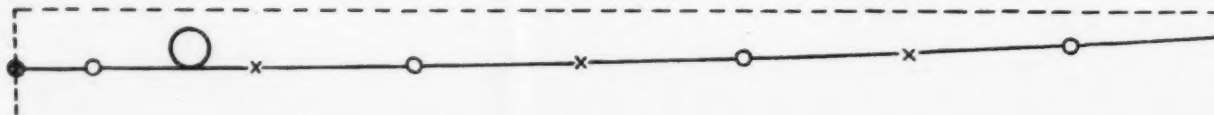
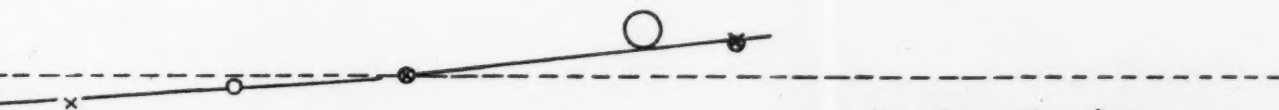
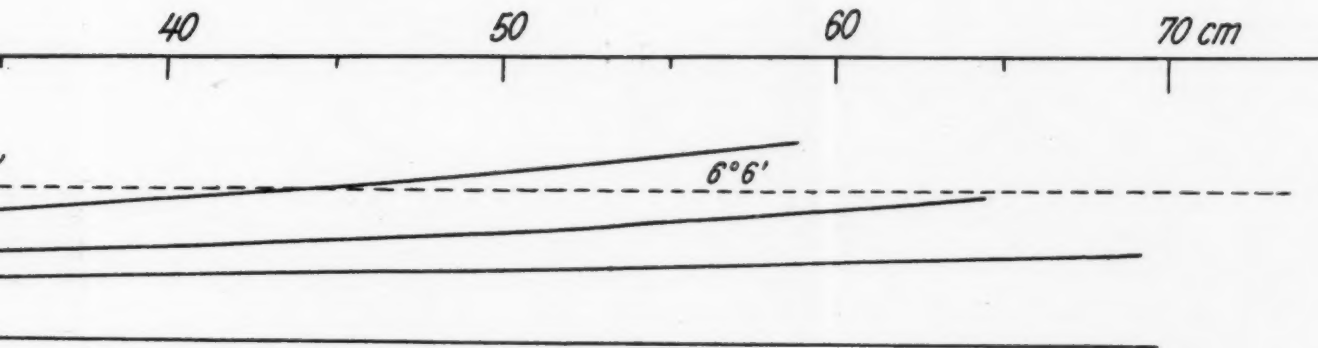
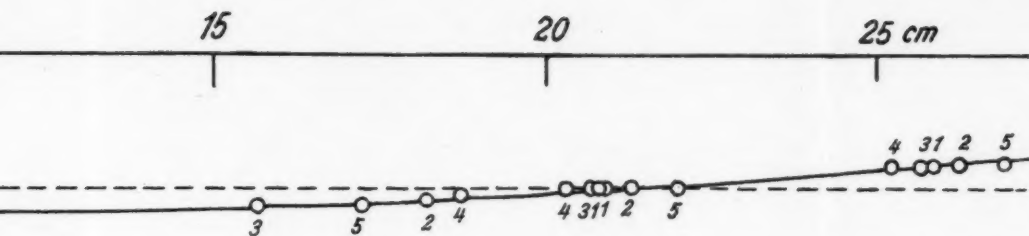


Fig. 11.





xx absteigender Ast

oo aufsteigender Ast

Fig. 3

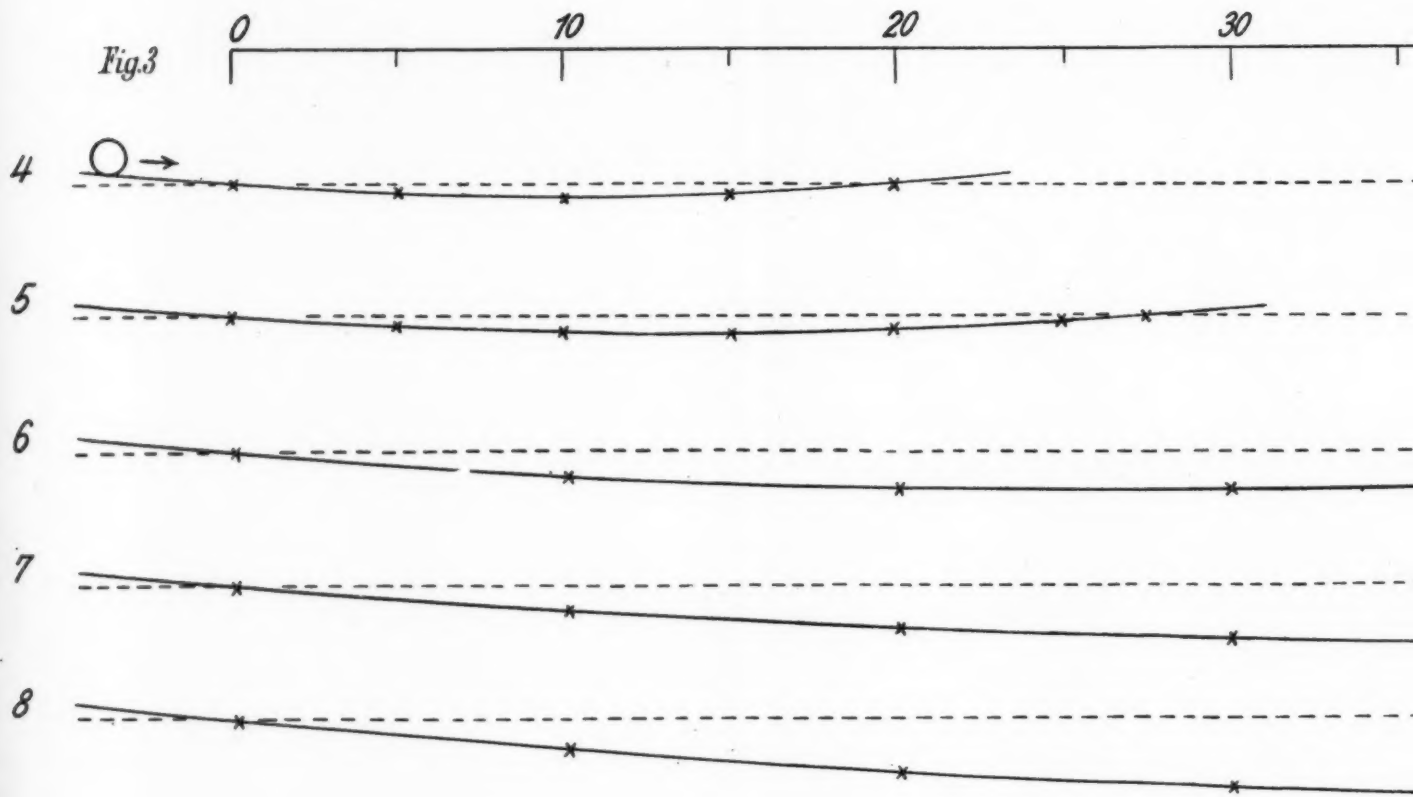
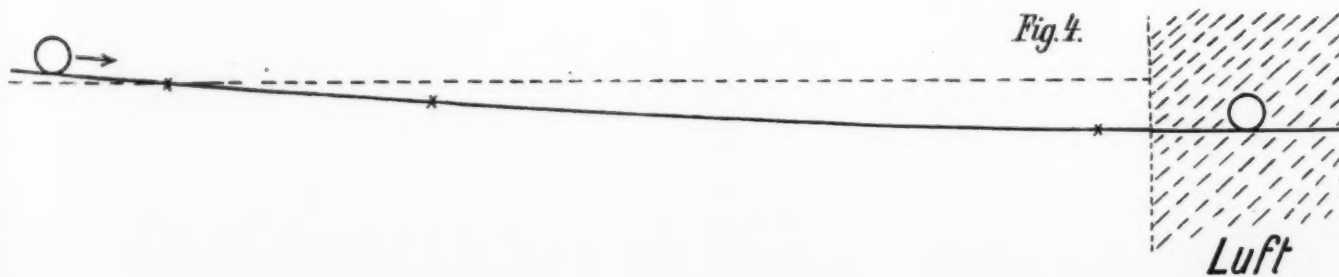


Fig. 4.





steigt noch hoch!

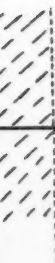




Fig. 5